Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2005/2006 gegeven door Dhr. O. Diekmann.

Functies en Reeksen (WISB211)
8 november 2005

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.

Veel succes!

Opgave 1

We definiëren drie functies $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ door respectievelijk

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^2 x\, t^{-1-x}\, e^{-t} \mathrm{d}t \\ g(x) &= \lim_{\beta\uparrow\infty} \int_1^\beta x\, t^{-1-x}\, e^{-t} \mathrm{d}t \\ h(x) &= \lim_{\beta\uparrow\infty} \int_1^\beta x\, t^{-1-x} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

a) Toon aan dat f continu is.

b) Bereken $g(0)$ en bewijs dat $\lim_{x\downarrow 0} g(x) = g(0)$.

c) Ga na of al dan niet geldt dat $\lim_{x\downarrow 0} h(x) = h(0)$.

Opgave 2

Zij $\omega = g_1(x,y)\mathrm{d}x \;+\; g_2(x,y)\mathrm{d}y$ gedefinieerd op $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, met

$$g_1(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad , \quad g_2(x,y) = \frac{y-x}{x^2+y^2}\ .$$

a) Toon aan dat ω gesloten is.

b) Toon aan dat $\int_\gamma \omega = 0$ als γ een gesloten C^1 kromme is die de oorsprong niet omsluit.

c) Zij nu γ een gesloten C^1 kromme waarvoor het windingsgetal $W_{(0,0)}(\gamma)$ van γ om de oorsprong gelijk is aan 1. Toon aan dat

$$\int_\gamma \omega = -2\pi.$$

d) Is ω exact?

e) Bereken $\int_\gamma \omega$ als gegeven is dat $W_{(0,0)}(\gamma) = k$.

Opgave 3

Zij $U \subseteq \mathbb{C}$ open. Gegeven is een functie

$$h : U \times [0,1] \to \mathbb{C}$$

zó dat

1. voor iedere $t \in [0,1]$ de functie $z \mapsto h(z,t)$ complex differentieerbaar is op U met afgeleide $\frac{\partial h(z,t)}{\partial z}$,
2. de functie
$$(z,t) \mapsto \frac{\partial h(z,t)}{\partial z}$$
continu is op $U \times [0,1]$,
3. $t \mapsto h(z,t)$ Riemann integreerbaar is over $[0,1]$, voor iedere $z \in U$.

a) Toon aan dat $g : U \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door
$$g(z) = \int_0^1 h(z,t)\mathrm{d}t$$
complex differentieerbaar is met afgeleide
$$g'(z) = \int_0^1 \frac{\partial h(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}t\ .$$

Zij nu $U = \{z \mid |z| < 1\}$ en zij $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Definieer $\gamma_z : [0,1] \to U$ door
$$\gamma_z(t) = tz$$
en $F : U \to \mathbb{C}$ door
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\mathrm{d}w\ .$$

b) Toon aan dat F complex differentieerbaar is.

Hint: gebruik onderdeel a).

c) Bereken $F'(z)$.

Hint: gebruik $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(tz) = f'(tz)z$ *en partiële integratie.*