Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2005/2006 gegeven door Odo Diekmann.

Functies en Reeksen (WISB211)
2 februari 2006

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.

Opgave 1

Zij voor $k \geq 1$ de functie $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ uniform continu.
Gegeven is dat voor een zekere functie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de rij functies $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ uniform naar g convergeert.

a) Bewijs dat g uniform continu is.
Ter herinnering: een functie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ heet uniform continu als $\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta=\delta(\epsilon)} > 0$ zó dat $\forall_{x,y \in \mathbf{R}}$ met $|x-y| < \delta$ geldt dat $|h(x) - h(y)| < \epsilon$.

b) Zij $h_k : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ gedefinieerd door $h_k(x) := f_k(x + \frac{1}{k})$. Toon aan dat de rij $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ uniform naar g convergeert.

Opgave 2

a) Bepaal de convergentiestraal ρ van de machtreeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} z^k$$

b) In welke punten van de cirkel $C(0;\rho) = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z| = \rho\}$ convergeert de machtreeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} z^k$?
Geheugensteuntje: formule (5.14) in de syllabus zegt

$$-\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \qquad \text{voor } |z| < 1.$$

c) Definieer voor $z \in B(0;\rho) = \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z| < \rho\}$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k} z^k.$$

Bepaal de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt $z = \frac{1}{6}$.

Opgave 3

Voor gegeven $f, g \in C(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$, de ruimte van continue 2π periodieke functies van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{C}$, definiëren we $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \mathcal{F}(f)$ en $(d_n)_{n=1}^{\infty} = \mathcal{F}(g)$, met $\mathcal{F}$ de Fourier-transformatie. Ons doel in deze opgave is de identiteit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n} \tag{1}$$

te bewijzen. We doen dit door f te benaderen met de symmetrische partiële sommen

$$s_l(x) := \sum_{k=-l}^{l} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

en evenzo g met

$$t_l(x) := \sum_{k=-l}^{l} d_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

a) Onder welke extra gladheidsvoorwaarden voor f (respectievelijk g)geldt dat s_l uniform naar f convergeert (respectievelijk t_l uniform naar g convergeert) voor $l \to \infty$?
NB. je hoeft alleen de voorwaarden te noemen, niet het bewijs te geven.

b) Toon aan dat als s_l uniform naar f convergeert voor $l \to \infty$ en t_l uniform naar g, dat dan $s_l\overline{t_l}$ uniform naar $f\overline{g}$ convergeert voor $l \to \infty$.
Hint: gebruik $f\overline{g} = (f - s_l)\overline{g} + s_l(\overline{g - t_l}) + s_l\overline{t_l}$.

c) Toon aan dat (1) geldt als s_l uniform naar f convergeert en t_l uniform naar g voor $l \to \infty$.

Door gebruik te maken van het integraal inproduct, dus

$$< f, g > := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

met bijbehorende norm $||f|| := \sqrt{< f, f >}$, kunnen we (1) bewijzen <u>zonder</u> extra gladheids voorwaarden op f en g.

d) Wat kun je zeggen over de convergentie van s_l naar f voor $l \to \infty$ met betrekking tot deze norm?

e) Toon aan dat (1) geldt voor alle $f, g \in C(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$.
Hint: gebruik een soortgelijke opsplitsing als bij b) en gebruik Cauchy-Schwarz.