Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2006/2007 gegeven door Odo Diekmann.

Functies en Reeksen (WISB211)
30 januari 2007

- *U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt.*
- *Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.*

Opgave 1

Zij voor $k \geq 1$ de functie $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_k(x) = \frac{1}{1+kx}$

a) Bepaal de functie $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zodanig dat $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = g(x)$.

b) Toon aan dat de convergentie uniform is voor $x \geq 1$.

c) Toon aan dat de convergentie **niet** uniform is voor $x \geq 0$.

Zij nu, ook weer voor $k \geq 1$, de functie $h_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h_k(x) = kxe^{-kx}$.

d) Bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(x)$ voor $x \geq 0$

e) Is de convergentie in d) uniform? Indien niet, geef dan aan waaraan een deelverzameling van $[0, \infty)$ moet voldoen opdat de convergentie wel uniform is.

Opgave 2

a) Bewijs dat de convergentiestraal ρ van de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

gelijk is aan $\frac{1}{R}$ wanneer gegeven is dat:

- $c_k \neq 0$ voor $k \geq k_0$ voor zekere $k_0 \geq 1$.
- $\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{c_{k+1}}{c_k}| = R > 0$.

Hint: ter herinnering formuleren we Lemma 5.18 uit de syllabus:

Lemma 5.18: De convergentiestraal ρ van de machtreeks $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ wordt gegeven door

$$\rho = \frac{1}{\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{k\geq N} |c_k|^{\frac{1}{N}}}$$

b) Bepaal de convergentiestraal van de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 3^k} z^k$$

c) Bepaal de convergentiestraal van de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 3^k} (z - \frac{1}{2})^{2k}$$

Opgave 3

Zij c_k, $k \in \mathbb{Z}$, een rij van complexe getallen. Gegeven is dat voor zekere $M > 0$ geldt dat voor alle $l \geq 1$

$$\sum_{k=-l}^{l} |kc_k| \leq M$$

a) Bewijs dat de Fourier-reeks

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}$$

uniform absoluut convergeert. Noem de som $g(x)$.

b) Bewijs dat de Fourier-reeks

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

uniform absoluut convergeert. Noem de som $f(x)$.

c) Bewijs dat $f(x) = f(0) + \int_0^x g(y)\mathrm{d}y$

d) Kies uit de volgende drie uitspraken degene die volgens u waar is, en licht uw keuze toe.

1. Een Fourier-reeks mag altijd termsgewijs gedifferentieerd worden.
2. Een Fourier-reeks mag termsgewijs gedifferentieerd worden als de coëfficiënten snel genoeg naar nul gaan voor $|k| \to \infty$.
3. Een Fourier-reeks mag nooit termsgewijs gedifferentieerd worden.