Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB211 werd in 2007/2008 gegeven door O. Diekmann.

Functies & Reeksen (WISB211)
29 januari 2008

U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt. Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten uit de syllabus u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.

Opgave 1

Zij voor $k \geq 1$ de functie $f_k : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_k(x) = kx\ \mathrm{e}^{-kx}$ en de functie $g_k : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ door $g_k(x) = kx\ \mathrm{e}^{-k^2 x}$.

a) Bepaal de functie $h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = h(x)$.

b) Is de convergentie uniform voor $x \geq 0$?

c) Bepaal de functie $H : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zodaning dat $\lim\limits_{k \to \infty} g_k(x) = H(x)$.

d) Is de convergentie uniform voor $x \geq 0$?

Achtergrondinformatie: zoals u zelf ook zonder veel moeite kunt nagaan, neemt de functie $x \mapsto x\mathrm{e}^{-\alpha x}$ (met $\alpha > 0$) op $[0, \infty)$ z'n maximum aan in $x = \frac{1}{\alpha}$ en convergeert deze functie naar nul voor $x \to \infty$.

e) Bewijs dat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k f_k(x)$ convergeert voor $0 \leq x < 1$ en dat de som een continue functie van x is op dit interval.

Opgave 2

Zij $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Definieer $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ door

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2}.$$

a) De Taylor-reeks van f in het punt $a = 0$ is

$$1 + z^2 + z^4 + \cdots$$

Wat is de convergentiestraal van deze reeks?

b) Toon aan dat f complex analytisch is.

c) Bepaal de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt $a = \frac{1}{2}$.

d) Definieer $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ door

$$g(z) = (z - 1)f(z).$$

Bepaal de convergentiestraal van de Taylor-reeks van g in het punt $a = \frac{1}{2}$.

Opgave 3

a) Bewijs dat de Fourier-reeks

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

uniform convergeert als $0 < r < 1$. Noem de som $f_r(x)$.

b) Toon aan dat

$$f_r(x) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}.$$

c) Toon aan dat voor $k \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_r(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = r^{|k|}.$$

d) Formuleer de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen (geef daarbij ook aan onder welke voorwaarden deze geldig is).

e) Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1+r^2}{1-r^2}.$$