TWEEDE DEELTENTAMEN - ANALYSE IN MEER VARIABELEN (16-06-20009)

- Zet je naam een collegekaartnummer op elk blad alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.
- Bij dit tentamen mogen boeken, syllabi, aantekeningen en/of rekenmachines **niet** worden gebruikt.
- Indien je een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kan maken, mag je de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.

Opdracht A (20%)

(1) Zij U het parallellogram in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,8)$, $(3,11)$. Bereken $\int_U x_1 + x_2 dx$. Hint: Vind een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die het parallellogram op een rechthoek afbeeldt.

(2) Zij B een rechthoek in $\mathbb{R}^n$ en $f : B \to \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat er een punt $x_0 \in B$ bestaat waarvoor geldt $\int_B f(x)dx = f(x_0) \cdot \mathrm{Vol}_n(B)$.

(3) Vind een tegenvoorbeeld dat laat zien dat de bewering in onderdeel 2 niet waar hoeft te zijn als B een willekeurige verzameling is waarvoor $\mathrm{Vol}_n(B)$ bestaat.

Opdracht B (30%)

De gamma functie $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is gegeven door de formule $\Gamma(p) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t} t^{p-1} dt$. Het is bekend dat $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$ en dat $\Gamma(p)$ ook gegeven kan worden door de formule $\Gamma(p) = 2 \cdot \int_{\mathbb{R}_+} e^{-u^2} u^{2p-1} du$. Verder is het bekend dat voor $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+$ geldt $\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) = \Gamma(p_1 + p_2) \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p_1 - 1} \alpha \sin^{2p_2 - 1} \alpha d\alpha$.

De beta functie $B : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door de formule: $B(p_1, p_2) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)}$.

(1) Bewijs dat voor $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^2$ geldt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p_1} \alpha \sin^{p_2} \alpha d\alpha = \frac{1}{2} B\left(\frac{p_1 + 1}{2}, \frac{p_2 + 1}{2}\right).$$

(2) Door gebruik te maken van de substitutie $t = \frac{u}{u+1}$ laat zien dat voor iedere $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_+^2$ geldt

$$B(p_1, p_2) = \int_0^1 t^{p_1 - 1}(1-t)^{p_2 - 1} dt = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{u^{p_1 - 1}}{(1+u)^{p_1 + p_2}} du = 2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{v^{2p_1 - 1}}{(1+v^2)^{p_1 + p_2}} dv.$$

(3) Kies nu $p_1 = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ en $p_2 = \frac{1}{2}$ en gebruik de substitutie $t = u^n$ om te bewijzen dat

$$\int_0^1 \frac{u^{m-1}}{\sqrt{1-u^n}} du = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{m}{n})}{n\Gamma(\frac{m}{n} + \frac{1}{2})}.$$

Opracht C (20%)

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^1 functie met compact support.

(1) Bewijs dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 dx = -2 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x_j \cdot f(x) \cdot D_j f(x) dx.$$

(2) De Cauchy-Schwarz ongelijkheid voor integralen houdt in dat voor functies $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu met compact support geldt $| < g, h > | \leq \|g\|_2 \cdot \|h\|_2$, waar

$$< g, h >= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)h(x)dx$$

en

$$\|g\|_2 = (\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

en idem voor $\|h\|_2$. Gebruik deze ongelijkheid (je hoeft deze dus niet bewijzen) en bewijs dat

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x))^2 dx \leq 2(\int_{\mathbb{R}^n} (x_j \cdot f(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_{\mathbb{R}^n} D_j f(x)^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

(3) Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ een begrensde open verzameling. Bewijs dat er een constante $c > 0$ bestaat (die van U af hangt) zo dat als $supp(f) \subset U$ (waar $supp(f)$ de afsluiting is van de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$) dan geldt

$$\int_U (f(x))^2 dx \leq c \int_U \|\text{grad}(f)(x)\|^2 dx.$$

Deze ongelijkheid heet de ongelijkheid van Poincare.

Opdracht D (30%)

Bij elke van de volgende beweringen moet je beslissen of hij wel of niet waar is. Geef duidelijk aan wat je antwoord is en zorg ervoor dat je een korte redenering geeft die je antwoord volledig steunt.

(1) Zij $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ de n-dimensionale bol en $v_n = \text{Vol}_n(B^n)$. De rij $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ is monotoon stijgend.

(2) Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ een open verzameling en $f, g : U \to \mathbb{R}$ twee functies die over U absoluut Riemann integreerbaar zijn. Dan is de functie $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ abosluut Riemann integreerbaar over U.

(3) Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ een open verzameling en $f, g : U \to \mathbb{R}$ twee functies. Als $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in U \backslash B$ waar $B \subseteq U$ eindig is dan geldt dat als f Riemann integreerbaar is over U dan is g dat ook en de integralen zijn gelijk.

(4) De gamma functie $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is de enige continue functie die een uitbreiding is van de faculteit functie naar de positieve reele getallen in de zin dat $\Gamma(n+1) = n!$ voor $n \in \mathbb{N}$.

(5) Zij U en V twee open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ en zij f een vectorveld over $U \cup V$. Als er functies $g_U, g_V, g_{U \cap V}$ zijn zo dat g_U een potentiaal van f is over U, g_V een potentiaal van f is over V en $g_{U \cap V}$ een potentiaal van f is over $U \cap V$ dan heeft f een potentiaal over $U \cup V$.