Eerste deeltentamen Analyse in Meer Variabelen (WISB212)

14-4-2009 van 14:00-17:00

- *Schrijf op elk blad je naam, studentnummer en eventuele werkcollegebegeleider (Weiss of Venselaar).*
- *Gebruik van boek of rekenmachine is* **niet** *toegestaan.*

Opgave 1

Bekijk de vergelijking

$$x^3y_1 + x^2y_1y_2 + x + y_1^2y_2 = 0$$

a) Bewijs dat er open omgevingen V van $(-1,1) \in \mathbb{R}^2$ en U van $1 \in \mathbb{R}$ bestaan zodat voor alle $y \in V$ bovenstaande vergelijking een unieke oplossing $x = \psi(y) \in U$ heeft. Bewijs ook dat deze impliciete functie $\psi : V \to U$ van de klasse C^∞ is.

b) Bereken de partiële afgeleiden $D_1\psi(-1,1)$ en $D_2\psi(-1,1)$.

c) Bewijs dat er *geen* open omgevingen V' van $(-1,1)$ en U' van -1 bestaan zodat bovenstaande vergelijking voor alle $y \in V'$ een unieke oplossing $x \in U'$ heeft. Hint: bestudeer de vergelijking voor de vaste waarde $y_1 = -1$.

Opgave 2

Zij $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ met de eigenschap dat $f(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Bekijk

$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1^2 + 9x_2^2 = (1-x_3)f^2(x_3)\right\}$$

We zoeken een parametrisatie van V. Het probleem suggereert om te werken met de parameter s waarvoor geldt dat $s^2 = 1 - x_3$, waarbij we opmerken dat $x_3 \leq 1$ voor alle $x \in V$. Voor vaste s ziet V eruit als een ellips.

a) Parametriseer deze ellips met een hoek t, geef dus een parametrisatie $\phi(s,t)$ van V.

Mocht je geen antwoord voor opgave 2a hebben, gebruik dan de (onjuiste!) parametrisatie:

$$\phi(s,t) = ((3se^s - 3s^3e^s)sin(t), (se^s - s^3e^s)cos(t), s^2)$$

b) Laat zien dat $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ een immersie is voor alle (s,t) behalve voor $(0,t)$ en $(\pm 1, t)$. Is ϕ buiten deze punten een inbedding?

Merk op dat $\phi(0,t) = \mathbf{e_3}$ en $\phi(\pm 1, t) = \mathbf{0}$.

c) Gebruik de submersiestelling om te bewijzen dat $V \backslash \{\mathbf{0}\}$ een 2-dimensionale C^1-deelvariëteit is van $\mathbb{R}^3$. Het punt $\mathbf{e_3} = (0,0,1)$ blijkt dus een punt te zijn van deze variëteit. Is dit in tegenspraak met de bevindingen van onderdeel b)?

Opgave 3

Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, Ax \rangle = 1\}$ de bijbehorende hyperboloïde.

a) Bewijs dat H een 2-dimensionale C^∞-deelvariëteit is van $\mathbb{R}^3$.

b) Geef een vergelijking voor het raakvlak $T_a H$ met $a \in H$.

Voor elke deelverzameling V van $\mathbb{R}^3$ noteren we met $a + V$ de translatie van V met a. We noteren dus met $a + T_a H$ het meetkundige raakvlak en met $D_a = (a + T_a H) \cap H$ de doorsnijding van dit meetkundige raakvlak met de hyperboloïde.

c) Bewijs dat $D_a \backslash \{a\}$ een 1-dimensionale C^∞-deelvariëteit is van $\mathbb{R}^3$.

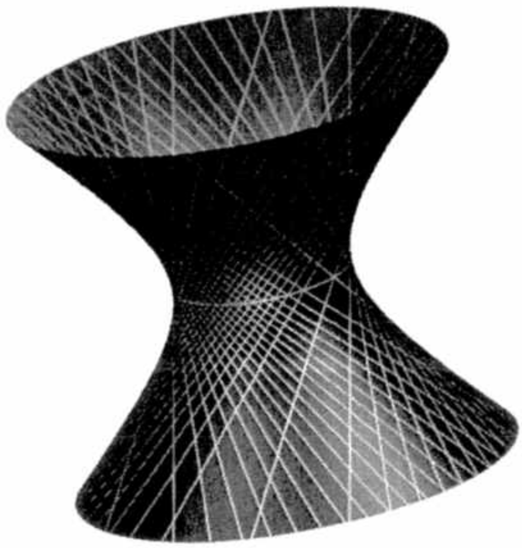
Zij $K = \{y \in \mathbb{R}^3 | \langle y, Ay \rangle = 0\}$ de kegel die hoort bij A.

d) Laat zien dat $D_a = a + (K \cap T_a H)$.

Het is bekend dat de doorsnijding van een (standaard)kegel met een vlak door de oorsprong bestaat uit ofwel de oorsprong, ofwel 1 lijn door de oorsprong, ofwel 2 lijnen door de oorsprong.

e) Bewijs dat $K \cap T_a H$ bestaat uit 2 lijnen door de oorsprong, en dat D_a bestaat uit 2 lijnen die beiden geheel op de hyperbool liggen. Is a een glad of een singulier punt van D_a?

f) Stel dat we de matrix A vervangen door een willekeurige symmetrische matrix met strikt negatieve determinant. Bestaat de doorsnijding van de hyperbool die hoort bij A en een willekeurig raakvlak nog steeds uit 2 rechte lijnen? Motiveer je antwoord.



2