Analyse in meer variabelen
Dinsdag 26 juni 2013, 13.30 – 16.30 uur

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam en studentnummer
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Als je een stelling gebruikt, laat dan zien dat aan alle voorwaarden is voldaan.
- Het is niet toegestaan computers, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. Laat T de torus in $\mathbb{R}^3$ zijn die gegeven wordt door de parametrisatie

$$\Phi(\alpha,\theta) = ((2+\cos\theta)\cos\alpha, (2+\cos\theta)\sin\alpha, \sin\theta), \qquad -\pi < \alpha, \theta \leq \pi.$$

(a) (10 punten) Bereken $\mathrm{Vol}_2(T)$ en toon aan dat T ook 2-dimensionaal Jordan meetbaar is.

Laat C de kromme zijn op de torus T die we krijgen door voor een vaste waarde $p \in \mathbb{R}$ het beeld te nemen van

$$\gamma(t) = ((2+\cos(pt))\cos t, (2+\cos(pt))\sin t, \sin(pt)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) (5 punten) Bewijs dat C een gesloten kromme is op T dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$ (Hint, bekijk de periodiciteit van γ).

(c) (10 punten) Stel een zo eenvoudig mogelijke integraal op waarmee je de lengte van C kunt berekenen (je hoeft deze integraal niet op te lossen) en bewijs dat C 1-dimensionaal Jordan meetbaar is dan en slechts dan als $p \in \mathbb{Q}$.

2. Laat Ω de volle ellipsoïde in $\mathbb{R}^3$ zijn die gegeven wordt door

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} < 1\}.$$

(a) (10 punten) Bereken $\mathrm{Vol}_3(\Omega)$.

(b) (5 punten) Bereken de uitwendige eenheidsnormaalvector $\nu(x_1, x_2, x_3)$ in het punt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$.

(c) (10 punten) In het vorige deeltentamen moest je de afstand berekenen van de oorsprong tot het raakvlak in $x = (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega$. Het antwoord was:

$$\mathrm{d}(0, T_x\partial\Omega) = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bereken

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}(0, T_x\partial\Omega)\, d_2x.$$

Hint: Doe dit niet rechtstreeks, maar gebruik bijvoorbeeld de divergentiestelling van Gauss. Kies dan zelf een eenvoudig vectorveld zodat dit mooi uitkomt.

3. (a) (10 punten) Laat $f(x) = (x_1, x_2, -2x_3)$ het vectorveld in $\mathbb{R}^3$ zijn en S_- en S_+ de twee halve-bolschillen

$$S_\pm = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ \pm x_3 \geq 0\}.$$

$\nu_\pm$ is de eenheidsnormaalvector op $S_\pm$ die naar boven gericht is. Bereken de twee integralen

$$\int_{S_\pm} \langle f, \nu_\pm \rangle d_2 x$$

en laat zien dat het antwoord gelijk is.

We willen dit nu generaliseren.

Laat $H_\pm$ twee hyperoppervlakken in $\mathbb{R}^n$ zijn die geparametriseerd worden door

$$\Phi_\pm(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \phi_\pm(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})), \quad y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_{n-1}^2 \leq 1.$$

$\phi_\pm$ beide C^2, neem aan dat

$$\phi_-(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \leq \phi_+(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$$

en dat

$$H_+ \cap H_- = \partial H_+ = \partial H_-.$$

$\nu_\pm$ is de eenheidsnormaal op $H_\pm$ die zo gekozen is dat de n$^{\mathrm{e}}$-component $(\nu_\pm)_n > 0$ is. Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een C^2-vectorveld zijn met $\operatorname{div} f = 0$.

(b) (10 punten) Bewijs dat

$$\int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle (y) d_{n-1} y = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle (y) d_{n-1} y.$$

(c) (10 punten) Laat ook $\partial H_\pm$ in een hypervlak door de oorsprong liggen, dus

$$\partial H_\pm \subset V_a = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, a \rangle = 0\} \quad \text{en ook } H_+ \cap V_a = H_- \cap V_a = \partial H_+ = \partial H_-.$$

Merk op dat $a_n \neq 0$ anders zijn H_- en H_+ geen hyperoppervlakken. Neem nu tevens aan dat

$$\langle f(x), a \rangle = 0 \quad \text{voor alle } x \in V_a.$$

Toon aan dat

$$\int_{H_-} \langle f, \nu_- \rangle (y) d_{n-1} y = \int_{H_+} \langle f, \nu_+ \rangle (y) d_{n-1} y = 0.$$