EERSTE DEELTENTAMEN WISB 212

Analyse in Meer Variabelen

14-04-2004 14–17 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi, aantekeningen en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1 (Autotoeteroppervlak). Definieer

$$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R} \qquad \text{door} \qquad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - (1 - x_3)x_3^2 \qquad \text{en} \qquad V = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid g(x) = 0 \,\}.$$

(i) Ga na dat $V \subset \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \leq 1 \,\}$.

Dit resultaat suggereert om voor een punt $x \in V$ te schrijven dat $x_3 = 1 - s^2$ met $s \in \mathbf{R}$.

(ii) Concludeer

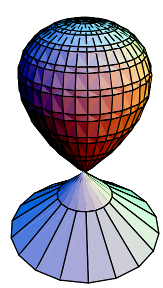
$$V \subset \operatorname{im}(\phi) \qquad \text{met} \qquad \phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \text{gegeven door} \qquad \phi(s, t) = (1 - s^2)(s \cos t, s \sin t, 1).$$

Bewijs dat in feite $V = \operatorname{im}(\phi)$.

(iii) Toon aan dat ϕ een immersie is in alle punten van $\mathbf{R}^3$ met uitzondering van de punten $(\pm 1, t)$ en $(0, t)$, voor $t \in \mathbf{R}$ willekeurig. Preciezer, bewijs

$$\dim \ker \big(D\phi(\pm 1, t)\big) = \dim \ker \big(D\phi(0, t)\big) = 1.$$

Bewijs $\phi(\pm 1, t) = 0$ en $\phi(0, t) = (0, 0, 1) = n$, voor alle $t \in \mathbf{R}$.



In de bijgaande illustratie is niets bijzonders te zien in $n \in \mathbf{R}^3$ (wel daarentegen in $0 \in \mathbf{R}^3$).

(iv) Bewijs m.b.v. de Submersiestelling dat V een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 is in alle punten behorende tot $V \setminus \{0\}$.

Achtergrond. Het feit dat ϕ niet-immersief is in de punten $(0, t)$ is dus een "hebbelijkheid" van ϕ en impliceert in dit geval geen singulier gedrag nabij n van $\operatorname{im}(\phi)$ zelf. Tot slot delen we zonder bewijs mee dat V geen deelvariëteit in $\mathbf{R}^3$ van dimensie 2 in 0 is.

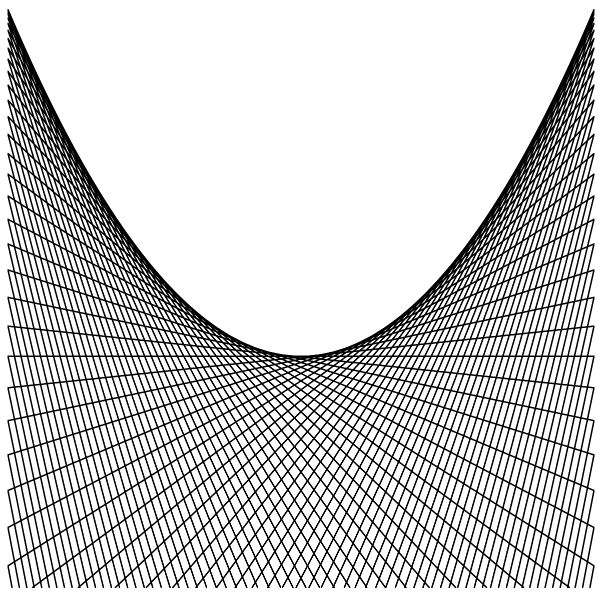
Exercise 0.2 (Viètetransformatie). Veronderstel dat $y \in \mathbf{R}^2$ voldoet aan $y_1^2 - y_2 \geq 0$ en laten x_1 en $x_2 \in \mathbf{R}$ de wortels zijn van het monisch kwadratisch polynoom $p(X, y) := X^2 + 2y_1X + y_2$ in de variabele X met coëfficiënten $2y_1$ en y_2.

(i) Bewijs de volgende *formules van Viète*: $y_1 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ en $y_2 = x_1x_2$.

Beschouw nu de volgende *Viètetransformatie* (van het vlak van wortels naar het vlak van coëfficiënten):

$$\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad \text{met} \qquad \Phi(x) = y = \big(-\frac{1}{2}(x_1 + x_2), x_1x_2\big).$$

In de onderstaande illustratie zien we het beeld onder Φ van een raster van equidistante rechte lijnen parallel aan de coördinaatassen (met andere woorden: ruitjespapier). Het lijkt dat deze lijnen onder Φ overgaan in lijnen die allemaal raken aan een parabool. We zullen dit opmerkelijke resultaat bewijzen in het onderstaande.



(ii) Bewijs dat $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x_2, x_1)$ en leidt hieruit af dat het voldoende is voor het bewijs om alleen horizontale lijnen te beschouwen.

(iii) Beschouw $\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \in \mathbf{R} \}$, de horizontale lijn op hoogte $x_2 \in \mathbf{R}$. Toon aan dat het beeld van deze lijn onder Φ wordt gegeven door

$$L(x_2) = \{ y \in \mathbf{R}^2 \mid p(x_2, y) = 0 \}.$$

Ga na dat $L(x_2)$ een rechte lijn in $\mathbf{R}^2$ is met richtingscoëfficiënt gelijk aan $-2x_2$.

(iv) Bepaal de verzameling $S \subset \mathbf{R}^2$ van singuliere punten van Φ (d.w.z., $x \in S$ dan en slechts dan als det $D\Phi(x) = 0$) en verifieer dat $P = \Phi(S)$ een parabool in $\mathbf{R}^2$ is.

Definieer $V = \{ y \in \mathbf{R}^2 \mid y_1^2 > y_2 \}$.

(v) Bewijs dat V de verzameling van punten in $\mathbf{R}^2$ is die onder P liggen. Toon aan dat $\Phi : \mathbf{R}^2 \setminus S \to V$ surjectief is; in het bijzonder, laat zien dat

$$\Phi : \{ x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > x_2 \} \to V$$

een C^∞ diffeomorfisme is. Concludeer dat $y \in V$ impliceert dat $y \in L(x_1) \cap L(x_2)$ met $x_1 \neq x_2$.

(vi) Zij $x_2 \in \mathbf{R}$ vast maar willekeurig gekozen. Bewijs dat $L(x_2) \cap P = \Phi(x_2, x_2)$, bereken de geometrische raaklijn aan P in dit punt, en laat zien dat deze raaklijn gelijk is aan $L(x_2)$.

(vii) Concludeer uit het voorgaande dat door ieder punt $y \in V$ er precies twee verschillende raaklijnen aan P gaan en dat de richtingscoëfficiënten van die raaklijnen gelijk zijn aan tweemaal de tegengestelden van de wortels van het polynoom $p(X, y)$ in X.