uitwerking tentamen groepentheorie 6-1-2017

Opgave 1. (a) De permutatie $(123)(45) = (13)(12)(45)$ is oneven. De elementen in zijn conjugatieklasse zijn $(abc)(de)$ met a, b, c, d, e onderling verschillend. Er zijn $\frac{6\cdot5\cdot4}{3}$ keuzes voor (abc) (delen door factor drie omdat $(abc) = (cab) = (bca)$) en 3 keuzes voor (de). Het antwoord is $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. (b) $sr = r^4 s$ dus $srsr^2 = r^4s^2r^2 = r^6 = r$ ($a = 1$, $b = 0$). Teken een een regelmatige $2n$-hoek met daarin een regelmatige n-hoek door iedere keer een hoekpunt over te slaan. Dit laat zien dat $D_n \leq D_{2n}$. De index is $\frac{4n}{2n} = 2$, dus D_n is normaal (stelling boek). (c) Stel G is enkelvoudig van orde $350 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2$. Dan heeft G een 5-Sylow (Sylow I) en het aantal 5-Sylows is $1, 6, 11, 16, \ldots$ en deelt $7 \cdot 2$ (Sylow III). Dus is er een unieke 5-Sylow en die is normaal (Sylow II); tegenspraak.

Opgave 2. (a) Zij G de groep (draaiings)symmetrieën van de tetraëder en X de collectie van alle $(n^6)^4$ mogelijke decoraties. Dan werkt G op X door de symmetrie toe te passen. Stel r is een draaiing over $\frac{2\pi}{3}$ rond een as door een hoekpunt en het zwaartepunt van het tegenoverliggende zijvlak. Het aantal elementen van X^r is $n^6 \cdot n^2$ (n^2 mogelijkheden voor het zijvlak loodrecht op de draaiingsas—teken een plaatje—en n^6 mogelijkheden voor een ander zijvlak, wat dan de resterende zijvlakken bepaald). Er zijn $4 \cdot 2$ zulke symmetrieën. Zij s de draaiing over π rond een as door de middelpunten van twee tegenoverliggende zijden. Het aantal elementen van X^s is $n^6 \cdot n^6$ (er zijn twee paren van zijvlakken die door s gepermuteerd worden en voor elk paar kunnen we één zijvlak vrij decoreren). Er zijn 3 zulke symmetrieën. Antwoord: $(n^{24} + 4 \cdot 2n^{6+2} + 3n^{6+6})/12$. (b) Axioma's checken. Voor alle $g, l, h \in G$ hebben we $ege^{-1} = ege = g$ en $g(lhl^{-1})g^{-1} = (gl)h(gl)^{-1}$. (c) Beschouw de actie van (b) voor $G = S_5$. Voor alle $\sigma \in G$ hebben we $G^\sigma = C(\sigma)$. De banen zijn gelijk aan conjugatieklassen en het aantal conjugatieklassen van S_5 is gelijk aan het aantal cykelstructuren viz. $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 5$, $5 = 2 + 1 + 1 + 1$, $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 1 + 1$, $5 = 2 + 2 + 1$, $5 = 3 + 2$. De telstelling geeft $\frac{1}{5!} \sum_{\sigma \in S_5} |C(\sigma)| = 7$.

Opgave 3. (a) Definieer $\phi : G \to (\mathbb{Z}_p\backslash\{0\})^n$, $\phi(A) = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ voor $A = (a_{ij}) \in G$. Merk op: $a_{ii} \not\equiv 0 \mod p$, voor alle i, want $\det(A) = \prod_i a_{ii} \not\equiv 0 \mod p$. Dit is een groepshomomorfisme omdat de diagonaal van AB gelijk is aan $(a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$ voor alle $B = (b_{ij}) \in G$. Deze afbeelding is surjectief omdat voor alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$ de diagonaalmatrix $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ hierop afbeeldt (merk op: $a_1 \cdots a_n \not\equiv 0 \mod p$ want anders $a_i \equiv 0 \mod p$ voor een i). De kern van ϕ is precies H dus het resultaat volgt uit de eerste homomorfiestelling. (b) $|H| = p^n = 8$. Beschouw

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ dus $H \cong D_4$ of $H \cong Q$; de enige niet-abelse groepen van orde 8. Maar $\alpha^2 = \beta^2 = e$ en dus $H \cong D_4$ vanwege de hint. (c) Stel N is het aantal elementen a_{ij} in een matrix $A = (a_{ij}) \in G$ met $i < j$ (dus $N = \frac{1}{2}n(n-1)$), dan $|G| = (p-1)^n p^N$. Voorts is $|H|$ gelijk aan p^N en dus is H een p-Sylow, want $\mathrm{ggd}(p, p-1) = 1$. Stel K is ook een p-Sylow, dan $K = gHg^{-1}$ (Sylow II), en dus $K = H$ (H normaal).

Opgave 4. De orde van G is $2p$ en dus is er een p-Sylow $H \leq G$ (Sylow I) en het aantal p-Sylows is $1, 1+p, 1+2p, \ldots$ en een deler van 2 (Sylow III). Dus is H de enige p-Sylow en normaal (Sylow II). Stel $H = \langle r \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ en stel $s \in G$ is een element van orde 2 (Cauchy). Dan $s \notin H$ ($2 \nmid p$ en Lagrange). Dus $G = H \sqcup Hs$ (Lagrange). We weten ook $srs^{-1} = srs \in H$ (H normaal) en dus $srs = r^n$ voor een $0 \leq n \leq p-1$. Deze vergelijking n keer met zichzelf vermenigvuldigen geeft $sr^ns = r^{n^2}$ ofwel $r^{n^2} = ssrss = r$. Derhalve $n^2 \equiv 1 \mod p$ en $n = \pm 1$ (hint). $n = -1$ want ander is G abels en dus $sr = r^{-1}s$. We krijgen een isomorfisme $D_{2p} \cong G$.