Exam Inleiding Topologie, 2 February 2021

Name ____

Place here your student card or ID. If you only have it electronically, attach a screenshot.

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het dictaat van Crainic en eigen aantekeningen.

By this I declare that I have written the solutions to the exam myself, without help from other people or other sources than the lecture notes by Crainic and self-written notes.

Date: ____

Signature: ____

Below you find first an English, then a Dutch version of the exam. You can write all solutions in Dutch or English.

- Write your solutions by hand. Write legible. Don't write close to the margins.
- After the exam you have 40 minutes to scan and upload your solutions **as a pdf in one file**. Check their readability and that you have scanned all pages.
- All claims have to be proven (if they are not known from the lecture or exercises). In particular if you are asked for an example you have to **prove** that the example satisfies the requirements.
- Read through all problems before you start to work.
- If you are unable to solve the first part of a question, you can still use the result in the second part.

Problem 1 (5 points). *Consider the equivalence relation $\sim$ on $\mathbb{R}$, where $x \sim y$ iff x and y are both positive or both negative or both zero. Let $X = \mathbb{R}/\sim$ with the quotient topology. List (with proof) all closed subsets of X.*

Problem 2 (10 points). *Let $(X, \mathcal{T}_X)$ and $(Y, \mathcal{T}_Y)$ be topological spaces and $f : X \to Y$ a function. Let further $(C_i)_{i \in I}$ be a cover of X by closed subsets $C_i \subseteq X$, i.e. $\bigcup_{i \in I} C_i = X$. Assume that $f|_{C_i} : C_i \to Y$ is a continuous function for each $i \in I$, where we equip C_i with the subspace topology.*

(a) Give an example of X, Y, f and $(C_i)_{i \in I}$ as above, where f is not *continuous.*

(b) Show that f is necessarily continuous if the indexing set I is finite.

Problem 3 (6 points). *Let $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ be the set of all continuous functions from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$. We consider on it the topology induced by the metric $d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$. Show that X is path-connected.*

Problem 4 (6 points). *Give examples $i, j : S^1 \to T$ of embeddings of the circle into the torus such that $T \setminus i(S^1)$ is not homeomorphic to $T \setminus j(S^1)$.*

Problem 5 (10 points). *(a) Consider the open cover $\mathcal{U} = \{(-2, 1), (-1, 2)\}$ of the interval $(-2, 2)$ with the Euclidean topology. Give an example of a partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$.*

(b) Let $X = \{x, y\}$ be a set with two elements. Give an example of a topology on X such that every open cover[1] has a subordinate partition of unity, but the topology is not Hausdorff.

Problem 6 (13 points). *Let $p, q \in S^2$ be the points $(1, 0, 0)$ and $(-1, 0, 0)$. Let $X = S^2/\{p, q\}$ with the quotient topology.*

(a) Show that X is not a 2-dimensional manifold.

(b) Show that $S^2 \setminus \{p, q\}$ is not homeomorphic to $\mathbb{R}^2$. (Hint: Use one-point compactifications.)

[1] For simplicity, you are allowed to assume that no open set occurs twice in the open cover.

- Schrijf je uitwerkingen met hand. Schrijf leesbaar. Schrijf niet dicht bij de kantlijn.
- Na het tentamen heb je 40 minuten om je uitwerkingen te scannen en **als een pdf in één bestand** te uploaden. Controleer de leesbaarheid en dat je alle pagina's gescand hebt.
- Je moet alle beweringen bewijzen die niet uit hoor- of werkcollege bekend zijn. In het bijzonder: als een opgave je naar een voorbeeld vraagt, moet je bewijzen dat je voorbeeld an de eizen voldoet.
- Lees alle opgaven voordat je begint te werken.
- Als je de eerste deel van een opgave niet kunt oplossen, kun je niettemin het resultaat in de tweede deel gebruiken.

Opgave 1 (5 punten). *Zij $\sim$ de equivalentierelatie op $\mathbb{R}$ waar $x \sim y$ dan en slechts dan als x en y allebei positief, allebei negatief of allebei null zijn. Zij X de topologische ruimte $\mathbb{R}/\sim$ met de quotiëntentopologie. Schrijf (met bewijs) alle afgesloten deelverzamelingen van X op.*

Opgave 2 (10 punten). *Gegeven zijn topologische ruimten $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ en een functie $f\colon X \to Y$. Zij $(C_i)_{i\in I}$ een overdekking van X door afgesloten deelverzamelingen $C_i \subseteq X$, d.w.z. $\bigcup_{i\in I} C_i = X$. Neem aan dat $f|_{C_i}\colon C_i \to Y$ voor iedere $i \in I$ continu is, waar we C_i met de deelruimtetopologie bekijken.*

(a) Geef voorbeelden van X, Y, f en $(C_i)_{i\in I}$ zoals boven, waar f niet *continu is.*

(b) Bewijs dat f continu is als de verzameling I eindig is.

Opgave 3 (6 punten). *Zij $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de verzameling van alle continu functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$ samen met de topologie die door de metriek $d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ geinduceerd is. Bewijs dat X padsamenhangend is.*

Opgave 4 (6 punten). *Geef voorbeelden van inbeddingen $i, j\colon S^1 \to T$ van de circel naar de torus zodat $T \setminus i(S^1)$ niet homeomorf is met $T \setminus j(S^1)$.*

Opgave 5 (10 punten). *(a) Bekijk de opene overdekking $\mathcal{U} = \{(-2,1), (-1,2)\}$ van het interval $(-2,2)$ met de euclidische topologie. Geef een voorbeeld van een partition of unity subordinate toe $\mathcal{U}$.*

(b) Zij $X = \{x, y\}$ een verzameling met twee elementen. Geef een voorbeld van een topologie op X zodat elke opene overdekking[2] een subordinate partition of unity heeft, maar de topologie niet Hausdorff is.

Opgave 6 (13 punten). *Gegeven zijn de punten $p = (1,0,0)$ en $q = (-1,0,0)$ in S^2. Zij $X = S^2/\{p,q\}$ met de quotiëntentopologie.*

(a) Bewijs dat X niet een 2-dimensionale manifold is.

(b) Bewijs dat $S^2\setminus\{p,q\}$ niet homeomorf met $\mathbb{R}^2$ is. (Tip: Gebruik een-punt-compactificaties.)

[2] Voor je gemak mag je aannemen dat geen twee verzamelingen in de overdekking identiek zijn.