Tentamen Numerieke Wiskunde
maandag, 3 november 2008, 9.00 – 12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'.
5. Succes.

1. Voor $f \in C^4([-1,+1])$ benaderen we $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ met de kwadratuurformule

$$Q(f) \equiv w_0 f(0) + w_1 f(a),$$

waarbij we $a \in [0,1]$, w_0 en w_1 in $\mathbb{R}$ optimaal kiezen, d.w.z., zo dat de formule exact is voor alle polynomen van graad $k \in \mathbb{N}$ met k maximaal.

Zij $R(f)$ de restterm:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = Q(f) + R(f).$$

(a) Bereken a, w_0 en w_1.

(b) Bewijs met behulp van tweede graads interpolatie dat er een $c \in \mathbb{R}$ is en een $k \in \mathbb{N}$ zodat voor iedere $f \in C^\infty([-1,+1])$ geldt

$$R(f) = c f^{(k)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [0,1].$$

Bereken c en toon aan dat $k = 3$. (Hint: gebruik een f'-waarde.)

(c) Geef, voor $n \in \mathbb{N}$, de n-maal gerepeteerde kwadratuurformule $Q_n(f)$ op $[0,1]$ (voor de stapgrootte h geldt dus $nh = 1$).
Zij $R_n(f)$ de restterm bij deze gerepeteerde formule: $\int_0^1 f(t)\,dt = Q_n(f) + R_n(f)$.
Toon aan dat, voor iedere $f \in C^4([-1,+1])$, geldt

$$R_n(f) = ch^3 \int_0^1 f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{voor} \quad h \to 0.$$

(d) Kun je een automatische integratie procedure (met variabele stagrootte) baseren op deze gerepeteerde formule? Zo ja, hoe richt je deze procedure dan in?

2. Voor een functie $f \in C^{(4)}([a,b])$ zijn functiewaarden $f(t_i)$ bekend, waarbij, voor een $n \in \mathbb{N}$, met $h \equiv (b-a)/n$, $t_i \equiv a + ih$ $(i \in \mathbb{Z})$. De t's, t_i's, ...in deze opgave behoren tot $[a,b]$.

We willen, ook voor andere t, functiewaarden $f(t)$ nauwkeurig benaderen.

Voor $t_{i+1\frac{1}{2}} \equiv t_i + 1\frac{1}{2}h$ gebruiken we een formule van de vorm

$$f^*(t_{i+1\frac{1}{2}}) \equiv \alpha_0 f(t_i) + \alpha_1 f(t_{i+1}) + \alpha_2 f(t_{i+2}) + \alpha_3 f(t_{i+3}), \tag{1}$$

die ontstaat door Lagrange interpolatie op $t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}$. De α_j zijn constanten (ze zijn niet alleen onafhankelijk van f, maar ook van h en i).

(a) Beargumenteer dat Lagrange interpolatie inderdaad leidt tot een formule als (2) (i.h.b., dat de α_j niet afhangen van h en i). Beargumenteer ook dat $\alpha_0 = \alpha_3$ en $\alpha_1 = \alpha_2$.

(b) Voor polynomen p van graad $< k$ is de formule exact (d.w.z. $p^*(t_{i+1\frac{1}{2}}) = p(t_{i+1\frac{1}{2}})$). Waarom? Bepaal k en laat zien dat er een $c \in \mathbb{R}$ is (onafhankelijk van f, i, h) en bepaal c, zo dat

$$f(t_{i+1\frac{1}{2}}) - f^*(t_{i+1\frac{1}{2}}) = ch^k f^{(k)}(\xi) \text{ voor 'n } \xi \in (t_i, t_{i+3}).$$

We herhalen de procedure: met $f^*(t_i) \equiv f(t_i)$ en $t_i^* \equiv t_{i/2}$ (dus $t_{2i}^* = t_i$ en $t_{2i+1}^* = t_{i+\frac{1}{2}}$) nemen we

$$f^{**}(t^*_{i+1\frac{1}{2}}) \equiv \alpha_0 f^*(t_i^*) + \alpha_1 f^*(t_{i+1}^*) + \alpha_2 f^*(t_{i+2}^*) + \alpha_3 f^*(t_{i+3}^*), \qquad (2)$$

(c) Neem $h = 1$, $f(i) = 0$ voor alle $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 3$, $f(3) = 1$. Geef in een schets aan waar de waarden van f^{**} komen in $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Is de bewering correct dat f^{**} op $t_i, t_{i+\frac{1}{4}}, t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{3}{4}}, t_{i+1}$ samen valt met een derde graads polynoom?

(d) Laat zien dat

$$|f(t^*_{i+1\frac{1}{2}}) - f^{**}(t^*_{i+1\frac{1}{2}})| \leq (\tfrac{1}{2^k} + |\alpha_0| + |\alpha_2|)|c|h^k \max_{\xi} |f^{(4)}(\xi)|$$

3. We willen in deze opgave de functie $f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\pi x)$ integreren tussen 0 en 1 en gebruiken daartoe de gerepeteerde trapeziumregel $T_h(f)$ met stapgrootte $h = 1/n$.

We vinden de volgende resultaten

$1/h$	$T_h(f)$
32	1.005845387747
64	1.008369675491
128	1.009242223804
256	1.009545746576
512	1.009651816592

(a) In het algemeen wordt de fout in de trapeziumregel bij halveren van h ongeveer $4\times$ zo klein (waarom is dat zo?). Uit de getallen blijkt dat dat hier niet het geval is. Hoe blijkt dat? Geef een verklaring.

(b) Geef aan hoe de slechtere foutreductie vermeden kan worden.

We keren terug naar de vraagstelling in (a).

(c) Laat zien dat de foutreductie toch past bij een fout van de vorm ch^α voor zekere c en zekere $\alpha \in (1, 2)$ (beide onafhankelijk van h). Welke waarde heeft α vermoedelijk? (Als je geen waarde van α gevonden hebt, mag je $\alpha = 3/2$ nemen). Gebruik dit inzicht om de fout in het 'beste' resultaat (met $h = 1/512$) te schatten en corrigeer het 'beste' resultaat.

(d) Geef een theoretische verklaring waarom de fout evenredig is met h^α. (Hint: Geef een uitdrukking voor de fout in de trapeziumregel op $[h, 1]$ en op $[0, h]$. Om de analyse wat te vereenvoudigen mag je hier f gelijk nemen aan $f(x) \equiv \sqrt{x}$).