Tentamen Numerieke Wiskunde
dinsdag, 6 november 2012, 9.00 –12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'.
5. Succes.

1. Voor $f \in C([-1,1])$ benaderen we $I(f) \equiv \int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$ met de kwadratuur formule

$$Q(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(0) + w_0 f(\alpha). \tag{1}$$

We willen w_0, w_1 en α zo kiezen dat Q alle polynomen p van graad $< k$ met k maximaal exact integreert, d.w.z. $I(p) = Q(p)$.

(a) Als p *oneven* is, dan geldt $I(p) = Q(p) = 0$. Dit hoef je niet te bewijzen. Je kunt ook bewijzen,[1] maar dat hoef je ook niet te doen, dat het voldoende is om

$$\int_0^1 p(t)\ \mathrm{d}t = w_1 p(0) + 2w_0 p(\alpha) \tag{2}$$

exact te hebben voor *even* polynomen p van zo hoog mogelijke graad.
Bepaal hiermee w_0, w_1 en α. Laat zien dat $k = 6$. (α is een rationaal getal in $(0,1)$.)

(b) Bewijs met een geschikt interpolatie polynoom dat er een $c \neq 0$ is zo dat

$$I(f) = Q(f) + cf^{(6)}(\xi) \quad \text{voor zekere} \quad \xi \in [-1,1] \quad (f \in C^{(6)}([-1,1])). \tag{3}$$

(je hoeft geen getalwaarde voor c uit te berekenen. Hint: gebruik ook f'-waarden).

Voor $h = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) en $t_i \equiv ih + \frac{h}{2}$ luidt de n maal gerepeteerde formule

$$Q_h \equiv \sum_{i=0}^{n} \tfrac{h}{2}[w_0 f(t_i - \alpha\tfrac{h}{2}) + w_1 f(t_i) + w_0 f(t_i + \alpha\tfrac{h}{2})] \tag{4}$$

en voor f voldoende glad geldt, met $c_2 \equiv \frac{1}{2^7}\, c\, [f^{(5)}(1) - f^{(5)}(0)]$, dat

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = Q_h + R_h \quad \text{met} \quad R_h = c_2 h^6 + c_4 h^8 + \ldots. \tag{5}$$

Dit hoef je niet te bewijzen, maar mag je wel gebruiken.

(c) Geef een formule om de fout te schatten in Q_h met behulp van Q_{2h} (je mag aannemen dat hogere orde termen in h in R_{2h} verwaarloosbaar zijn). De foutschatting kan je gebruiken om je benadering Q_h te verbeteren tot, zeg $Q_h^{(1)}$. Geef een formule voor deze gecorrigeerde benadering $Q_h^{(1)}$. Betoog dat $Q_h^{(1)}$ een fout van $\mathcal{O}(h^8)$ heeft.

(d) Hoeveel functiewaarden moet je evalueren om een gecorrigeerde benadering $Q_h^{(1)}$ uit te kunnen rekenen voor $h = 1/2$ ($n = 2$)? Hoeveel functiewaarden moet je evalueren om met behulp van het Romberg schema gebaseerd op de Bulirsch rij en de gerepeteerde trapeziumregel in de $\mathcal{O}(h^8)$ kolom uit te komen?

[1] Omdat $I(p) = 2\int_0^1 p(t)\ \mathrm{d}t$ en $Q(p) = w_1 p(0) + 2w_0 p(\alpha)$ voor even polynomen p.

2. We willen in deze opgave de functie $f(x) \equiv 1 + \sin^2(\pi x^2)$ integreren tussen 0 en 1 en gebruiken daartoe de gerepeteerde trapeziumregel met verschillende stapgrootten $h > 0$. We vinden de volgende resultaten

$1/h$	$T_h(f)$
8	1.37783845638733
16	1.37793137490955
32	1.37793633086465
64	1.37793662881191
128	1.37793664725466
256	1.37793664840455

(a) Passen deze resultaten redelijk bij een fout die evenredig is met h^2? Was dit te verwachten? Is de fout wel evenredig met een andere macht van h? Welke?

(b) Schat de fout in het resultaat voor $h = 1/256$. Hoe gebruik je deze schatting om een nauwkeuriger antwoord te krijgen?

(c) Stel dat je, onder de aanname dat de fout evenredig is met h^2, de fout schat en het resultaat corrigeert (hoe doe je dat?). Kan je dan, zonder te rekenen, iets zeggen over de 'structuur' van de fout in de 'gecorrigeerde benadering'?

3. Zij f een 2 maal continu differentieerbaar functie gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

(a) Voor iedere polynoom p, zij

$$R(p) \equiv \max\{|f(x) - p(x)| \,\big|\, x \in [-1, 1]\} + \max\{|f(y) - p(y)| \,\big|\, y \in \{-2, 0, 2\}\}. \tag{6}$$

Laat zien dat er een eerste graads polynoom p is waarvoor geldt

$$R(p) \leq 2 \max\{|f^{(2)}(\xi)| \,\big|\, \xi \in [-2, 2]\}. \tag{7}$$

Beschouw, voor een functie g, de volgende twee eigenschappen: g is

(1) een tweede graads polynoom op iedere interval $[2k - 1, 2k + 1]$ $(k \in \mathbb{Z})$,

(2) continu differentieerbaar (ook in $x = 2k + 1$) $(k \in \mathbb{Z})$.

Er is een functie B met de eigenschappen (1) en (2) en waar bovendien voor geldt dat, $B(x) > 0$ als $|x| < 3$, $B(x) = 0$ anders, en $\sum_{k\in\mathbb{Z}} B(x - 2k) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$. (Dit hoef je niet te bewijzen, maar mag je wel gebruiken). Definieer

$$G(f)(x) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k)B(x - 2k) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{8}$$

(b) Laat zien dat voor iedere x, $B(x - 2k) \neq 0$ voor ten hoogste drie gehele k.
Toon aan dat $G(f)$ de eigenschappen (1) en (2) heeft.

(c) Voor ieder eerste graads polynoom p geldt $G(p) = p$: dit hoef je ook niet bewijzen maar mag je wel gebruiken. Laat zien dat voor ieder eerste graads polynoom p geldt

$$|f(x) - G(f)(x)| = |(f - p)(x) - G(f - p)(x)| \leq R(p) \qquad (|x| \leq 1). \tag{9}$$

Concludeer dat

$$|f(x) - G(f)(x)| \leq 2 \max\left\{|f^{(2)}(\xi)| \,\Big|\, \xi \in [-2, 2]\right\} \quad (|x| \leq 1). \tag{10}$$

(d) Om een hogere nauwkeurigheid te krijgen, definiëren we voor $h > 0$

$$G_h(f)(x) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kh)B(\tfrac{x}{h} - k) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{11}$$

Laat zien dat $G_h(f)$ continu differentieerbaar is, $G_h(f)$ op ieder interval $[2kh - h, 2kh + h]$ een tweede graads polynoom is $(k \in \mathbb{Z})$, en

$$|f(x) - G_h(x)| \leq h^2 2 \max\{|f^{(2)}(\xi)| \,\big|\, \xi \in \mathbb{R}\}. \tag{12}$$