Tentamen Numerieke Wiskunde
donderdag, 3 januari 2013, 9.00–12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'.
5. Succes.

1. Voor $f \in C^4([0,+1])$ benaderen we $\int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$ voor $h \in (0,1]$, met de kwadratuurformule

$$Q(f) \equiv w_0 f(0) + w_1 f(a),$$

waarbij we $a \in [0,h]$, w_0 en w_1 in $\mathbb{R}$ optimaal kiezen, d.w.z., zo dat de formule exact is voor alle polynomen van graad $k \in \mathbb{N}$ met k maximaal.

(a) Bereken a, w_0 en w_1.
Zij $R(f)$ de restterm:

$$\int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t = Q(f) + R(f).$$

(b) Bewijs met behulp van tweede graads interpolatie dat er een $c \in \mathbb{R}$ is en een $\ell \in \mathbb{N}$ zodat voor iedere $f \in C^\infty([0,h])$ geldt

$$R(f) = c h^{\ell+1} f^{(\ell)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [0,h].$$

Bereken c en toon aan dat $\ell = 3$. (Hint: gebruik een f'-waarde.)

(c) We repeteren Q. Geef, voor $n \in \mathbb{N}$, de n-maal gerepeteerde kwadratuurformule $Q_n(f)$ op $[0,1]$ (voor de stapgrootte h geldt dus $nh = 1$).
Zij $R_n(f)$ de restterm bij deze gerepeteerde formule: $\int_0^1 f(t)\,dt = Q_n(f) + R_n(f)$.
Toon aan dat, voor iedere $f \in C^4([0,1])$, geldt

$$R_n(f) = c h^3 \int_0^1 f^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{voor} \quad h \to 0.$$

(d) Kun je een automatische integratie procedure met variabele stapgrootte baseren op deze gerepeteerde formule? Zo ja, hoe richt je deze procedure dan in?

2. We benaderen de integraal $I \equiv \int_0^1 \exp(-t^2)\,dt$ voor diverse stapgrootten $h = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbf{N}$ door

$$Q(h) \equiv h[f(0) + f(h) + f(2h) + \ldots + f(1-2h) + f(1-h)].$$

We vinden de volgende waarden

h	–	$Q(h)$
$\frac{1}{2}$	–	0.8894004
$\frac{1}{4}$	–	0.8219992
$\frac{1}{8}$	–	0.7853731
$\frac{1}{16}$	–	0.7663384
$\frac{1}{32}$	–	0.7566411
$\frac{1}{64}$	–	0.7517476

(a) Laat zien dat de getallen redelijk passen bij een fout die evenredig is met h.

(b) Geef theoretische argumenten die laten zien dat deze evenredigheid met h te verwachten was (Hint: vat $Q(h)$ op als een "verstoorde" trapeziumregel $T(h)$).

(c) Schat de fout in de benaderingen zoals die boven gegeven zijn en gebruik die schattingen om de gegeven benaderingen te corrigeren.

(d) Kun je ook de fout in deze gecorrigeerde benaderingen (de tweede kolom in een "Romberg schema") schatten en de schatting weer gebruiken om een nog betere benadering te verkrijgen (derde kolom in een Romberg schema)? Motiveer je antwoord en geef aan hoe de schattingen en correcties uitgevoerd zullen worden (je hoeft hier geen numerieke waarden te produceren). Geef aan hoe je verder dit Romberg schema af zult maken.

3. Beschouw een $f \in C^{(4)}([0,1])$.

Voor $h > 0$ is p het Hermite interpolatie polynoom voor f op 0 en h, d.w.z., p is van minimale graad en $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(h) = f(h)$ en $p'(h) = f'(h)$.

De maxima in deze opgave worden genomen over x (of ξ) in $[0, h]$.

(a) Wat is de graad van p? Voor iedere $x \in [0, h]$ is er een $\xi \in (0, h)$ zo dat

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{4!} x^2 (x-h)^2 f^{(4)}(\xi). \tag{1}$$

Waarom? Laat zien dat

$$\max_x |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{2^4\, 4!} \max_\xi |f^{(4)}(\xi)|. \tag{2}$$

We willen aantonen dat

$$\max_x |f'(x) - p'(x)| = \mathcal{O}(h^3) \text{ voor } h \to 0. \tag{3}$$

(b) Kun je (2) gebruiken om (3) te bewijzen? Kun je (1) hiervoor gebruiken?

(c) Laat zien dat p' het Lagrange interpolatie polynoom is voor f' op $0, h$ en η voor 'n η in $(0, h)$. Concludeer dat er voor iedere $x \in [0, h]$ een ξ in $(0, h)$ is waarvoor

$$f'(x) - p'(x) = \frac{1}{3!} x(x-h)(x-\eta) f^{(4)}(\xi). \tag{4}$$

(d) Toon aan dat

$$\max_x |f'(x) - p'(x)| = \frac{2\,h^3}{3^4} \max_\xi |f^{(4)}(\xi)|. \tag{5}$$