Tentamen Numerieke Wiskunde
dinsdag, 28 januari 2014, 13.30–16.30

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'. Met 'f is een *gladde functie*' bedoelen we dat alle afgeleiden van f die je in formules tegenkomt bestaan en continu zijn.
5. Succes.

1. We willen van een gladde functie f op $\mathbb{R}$ de waarde $f'(0)$ berekenen. Van f zijn, voor $h > 0$, de waarden in 0, h en $2h$ bekend. We proberen, met geschikte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, een nauwkeurige benadering te vinden van $f'(0)$ met de volgende formule

$$D_h(f) \equiv \frac{\alpha f(0) + \beta f(h) + \gamma f(2h)}{h}. \tag{1}$$

Zij $R_h(f) \equiv f'(0) - D_h(f)$ de fout. De formule is *exact voor* f als $R_h(f) = 0$.

(a) Bepaal α, β en γ zodat de formule exact is voor polynomen van zo hoog mogelijke graad, d.w.z., we willen dat $p'(0) = D_h(p)$ voor alle polynomen p van graad $\leq k$ met k zo groot mogelijk. Welke waarde heeft k dan?

Verder werken we met de optimale α, β en γ (de waarden die je in a) gevonden hebt).

(b) Laat zien dat voor een zekere $c \in \mathbb{R}$ (met c onafhankelijk van f en h) geldt dat

$$R_h(f) = ch^2 f^{(3)}(0) + \mathcal{O}(h^3) \qquad (h \to 0). \tag{2}$$

(Hint: bedenk ook dat $D_h(f) = \mathcal{O}(h^{m-1})$ als $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ voor een $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ $\quad (h \to 0)$. Dit geldt overigens voor iedere α, β en γ.) Bepaal c.

(c) Kan je een Romberg schema opzetten om middels de drie waarden $D_h(f)$, $D_{\frac{1}{2}h}(f)$, $D_{\frac{1}{4}h}(f)$ nauwkeurigere benaderingen van $f'(0)$ te krijgen? Zo ja, beschrijf dan in detail hoe je de overige drie getallen in Romberg schema uitrekent. Wat voor orde van nauwkeurigheid verwacht je in deze getallen?

(d) Stel nu dat we niet over de exacte waarden $f(x)$ kunnen beschikken maar alleen over benaderingen $f^*(x)$ met bekende onbetrouwbaarheid $\overline{\varepsilon}$: met $\varepsilon(x) \equiv f(x) - f^*(x)$ is $|\varepsilon(x)| \leq \overline{\varepsilon}$ (alle x). In plaats van $f(x)$ gebruiken we $f^*(x)$ om $D_h(f)$ te berekenen (eventuele andere evaluatiefouten verwaarlozen we). Dit levert $D_h^*(f)$ op. Schat $|D_h(f) - D_h^*(f)|$ af en schat af hoe deze fout doorwerkt in het Romberg schema van (c).

2. Beschouw op het interval $[0, \pi]$, voor iedere $\alpha \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, de functie

$$f_\alpha(t) \equiv \sin^{1+\alpha}(t)\, \exp(-\cos^2(t)) \quad (t \in [0, \pi]) \quad \text{met integraal} \quad I(\alpha) \equiv \int_0^\pi f_\alpha(t)\, dt.$$

(a) We berekenen $I(\alpha)$ met de gerepeteerde trapeziumregel $T_h(f_\alpha)$ met stapgrootte $h = \pi/(4n)$ voor verschillende waarden voor n. De computer produceert voor de drie α's de volgende getallen (per α een kolom).

	A	B	C
n	$T_h(f)$	$T_h(f)$	$T_h(f)$
1	1.459084343274	1.261766229580	1.351898457062
2	1.484314179088	1.258924268916	1.357574013183
4	1.491292039591	1.258924256552	1.359030681071
8	1.493057785731	1.258924256552	1.359292839266
16	1.493500556661	1.258924256552	1.359339387697
32	1.493611332822	1.258924256552	1.359347625420

Helaas is in de output niet vermeld welke kolom bij welke α hoort ($f = f_\alpha$). Kan je (zonder op de eerste twee decimalen in ieder getal te letten) met enige zekerheid vaststellen bij welke kolom (A, B of C) welke α hoort? Beargumenteer je antwoord. (De eerste twee decimalen zou je eventueel kunnen gebruiken om je antwoord te "checken".)

(b) Laat zien dat

$$I(\alpha) = \int_{-1}^{+1} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{met} \quad g_\alpha(x) \equiv (1-x^2)^{\alpha/2}\exp(-x^2).$$

We kunnen $I(\alpha)$ dus ook berekenen met de gerepeteerde trapeziumregel $T_h(g_\alpha)$ met $h = \frac{2}{n}$. Heeft, voor $\alpha \in \{0, 1\}$, $T_h(f_\alpha)$ of $T_h(g_\alpha)$ de voorkeur? (Geef voor- en tegenargumenten.)

3. Zij $B \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ zo dat $B(x) > 0$ als $|x| < 2$ en $B(x) = 0$ als $|x| \geq 2$.
Voor iedere $h > 0$ en iedere $f \in C(\mathbb{R})$ definiëren we (sommerend over gehele getallen j)

$$B_h(x) \equiv B(x/h), \qquad S_h(f)(x) \equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(jh)B_h(x - jh) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

(a) Laat zien dat

$$S_h(f)(x) = \sum_{j=-1}^{2} f(jh)B_h(x - jh) \quad \text{als} \quad x \in [0, h]. \tag{4}$$

Bewijs dat $S_h(f) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Stel verder dat B zo is dat $S_1(p) = p$ voor ieder polynoom p van graad ≤ 1.

(b) Beschouw een $x \in [0, h]$. Toon aan dat voor ieder eerste graads polynoom p geldt

$$S_h(p) = p, \quad f(x) - S_h(f)(x) = (f(x) - p(x)) - \sum_{j=-1}^{2} (f(jh) - p(jh))\, B_h(x - jh). \tag{5}$$

Bewijs ook dat

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq |f(x) - p(x)| + \max\{|f(t) - p(t))| \,\big|\, t = -h, 0, h, 2h\}. \tag{6}$$

(c) Laat zien dat, in geval $f \in C^{(2)}(\mathbb{R})$, voor iedere $x \in [0, h]$ geldt

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq \frac{9}{8}h^2|f''(\xi)| \quad \text{voor zekere } \xi \in [-h, 2h] \subset [x - 2h, x + 2h]. \tag{7}$$

Concludeer dat er voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$|f(x) - S_h(f)(x)| \leq \frac{9}{8}h^2|f''(\xi)| \quad \text{zekere } \xi \in [x - 2h, x + 2h]. \tag{8}$$