Tentamen Numerieke Wiskunde
donderdag, 29 januari 2015, 9.00–12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent 'f is *per definitie* gelijk aan g'. Met 'f is een *gladde functie*' bedoelen we dat alle afgeleiden van f die je in jouw formules tegenkomt bestaan en continu zijn.
5. Succes.

1. We willen van een gladde functie f op $\mathbb{R}$ de waarde $f''(0)$ berekenen. Van f en van f' zijn, voor $h > 0$, de waarden in $-h$, 0 en h bekend. We proberen een nauwkeurige benadering te vinden door

$$D_{1,h}(f) \equiv \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} \quad \text{en} \quad D_{2,h}(f) \equiv \frac{f'(h) - f'(-h)}{2h}, \tag{1}$$

met geschikte $\alpha \in \mathbb{R}$ te combineren tot de formule

$$D_h(f) \equiv \alpha\, D_{1,h}(f) + (1-\alpha)\, D_{2,h}(f). \tag{2}$$

Zij $R_h(f) \equiv f''(0) - D_h(f)$ de fout. De formule is *exact voor* f als $R_h(f) = 0$.

(a) Laat zien dat, voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$, $R_h(f) = \mathcal{O}(h^2)$ voor $h \to 0$ en dat de formule exact is voor alle oneven polynomen.

(b) Bepaal α zodat de formule exact is voor polynomen van zo hoog mogelijke graad, d.w.z., $p''(0) = D_h(p)$ voor alle polynomen p van graad $\leq k$ met k zo groot mogelijk. Welke waarde heeft k dan?

Neem verder voor α de optimale waarde.

(c) Bewijs dat

$$R_h(f) = -\frac{2}{6!} h^4 f^{(6)}(0) + \mathcal{O}(h^5) \qquad (h \to 0). \tag{3}$$

(Hint: als, voor $m \geq 3$, $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ en $f'(h) = \mathcal{O}(h^{m-1})$ dan $D_h(f) = \mathcal{O}(h^{m-2})$. Dit geldt overigens voor iedere α.)

Stel dat we alleen over de *berekende* waarden $f^*(x)$ beschikken met fout $\varepsilon(x) \equiv f(x) - f^*(x)$ en van ε is bekend dat $\varepsilon(x) = h^5 g(x) + \mathcal{O}(h^6)$ voor een gladde, maar onbekende, functie g. Verder voldoet f aan de differentiaalvergelijking $f'(x) = F(x, f(x))$, met F een bekende gladde functie. Hiermee rekenen we $f'(x)$ uit en $\varepsilon(x)$ leidt tot een fout $\delta(x)$ op $f'(x)$. Verdere rekenfouten negeren we (zijn verwaarloosbaar).

(d) Laat zien dat $\delta(x) = h^5\, \widetilde{g}(x) + \mathcal{O}(h^6)$, waarbij $\widetilde{g}$ 'n gladde functie is.

In plaats van $f(x)$ en $f'(x)$ in $x = -h, 0, h$ gebruiken we in de berekening van $D_h(f)$ de met fout belaste waarden. Het resultaat noteren we met $D_h^*(f)$ met fout $R_h^*(f) \equiv f''(0) - D_h^*(f)$. Zijn de volgende twee uitspraken correct voor $h \to 0$?

$$\text{(i)} \quad R_h^*(f) = -\frac{2}{6!} h^4 f^{(6)}(0) + \mathcal{O}(h^5), \qquad \text{(ii)} \quad R_h^*(f) = \mathcal{O}(h^4). \tag{4}$$

2. Beschouw, voor $\varepsilon = e^{-a} \in [0, e)$ en de natuurlijke logaritme ln, de integraal

$$I_\varepsilon \equiv \int_\varepsilon^{1/e} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_1^a g(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{voor} \quad f(t) \equiv -\frac{1}{\ln(t)} \quad \text{en} \quad g(x) \equiv \frac{e^{-x}}{x}.$$

We willen I_ε numeriek bepalen middels de gerepeteerde trapezium regel (gTR).

(a) Laat zien dat de twee integralen aan elkaar gelijk zijn en dat ze bestaan, ook voor $\varepsilon = 0$. Toepassing van de gTR geeft problemen geval $\varepsilon = 0$. Waarom?
Laat zien dat voor $\varepsilon > 0$, $|I_0 - I_\varepsilon| \le \varepsilon$ en dat de gTR zondermeer toepasbaar is om I_ε uit te rekenen.

We nemen verder $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$. Voor $\varepsilon = 10^{-8}$ en $h = h_0/n$ krijgen we, met $h_0 \equiv \frac{1}{e} - \varepsilon$ voor f en $h_0 \equiv a - 1$ voor g, de volgende resultaten.

n	$T_h(f)$	n	$T_h(g)$
16	0.219133499162	16	0.223883367440
32	0.219275691802	32	0.220516856207
64	0.219337198626	64	0.219667684585
128	0.219363773680	128	0.219454904334

(5)

(b) Laat zien dat bovenstaande resultaten voor g passen bij een fout die evenredig is met h^2. Was dat te verwachten? Schat de fout in de laatste benadering $T_h(g)$ van I. Stel dat we doorgaan met het verdubbelen van n, voor welke n verwacht je een fout $|I_\varepsilon - T_h(g)| \le 10^{-8}$?

(c) We verwachten dat de vertrouwensgetallen bij toepassen van de gTR op f met halverende rij stapgroottes naar 4 convergeren (waarom?). De getallen in (5) lijken eerder bij een fout evenredig met h te passen. Waarom lijkt dat zo? Kan je verklaren waarom het fout gedrag slechter is dan verwacht? Hoe schat je de fout in de laatste benadering $T_h(f)$ van I? Hoe betrouwbaar is deze schatting?

(d) Wat verwacht je van een Romberg schema in deze gevallen (hier hoef je niets uit te rekenen, een discussie volstaat)?

3. In deze opgave is f telkens een gladde functies op $[-1, +1]$.
We benaderen $I(f) \equiv \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ met de kwadratuurformule

$$Q(f) \equiv w_0 f(-a) + w_1 f(1-a), \quad \text{waarbij} \quad a \equiv \sqrt{\frac{1}{6}}, \quad \omega_0 \equiv \frac{1}{2} - a, \quad \omega_1 \equiv \frac{1}{2} + a.$$

Zij $R(f) \equiv \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t - Q(f)$ de restterm. De formule is *exact voor* f als $R(f) = 0$.

De formule is exact voor alle tweede graads polynomen, maar niet voor alle derde graads polynomen. Dit hoef je niet aan te tonen, maar mag je wel gebruiken.

(a) Bewijs met behulp van tweede graads interpolatie dat er een $c \in \mathbb{R}$ is en een $k \in \mathbb{N}$ zodat

$$R(f) = c f^{(k)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [-a, 1].$$

(Hint: gebruik een f'-waarde.) Laat zien dat $k = 3$ en dat c onafhankelijk is van f.

(b) Geef, voor $n \in \mathbb{N}$, de n-maal gerepeteerde kwadratuurformule $Q_n(f)$ op $[0, 1]$ (voor de stapgrootte h geldt dus $nh = 1$). (Hint: stel eerst een versie van Q en R op voor de integraal $\int_0^h f(t)\, \mathrm{d}t$.)

(c) Toon aan dat

$$R_n(f) \equiv \int_0^1 f(t)\, dt - Q_n(f) = ch^3 \int_0^1 f^{(3)}(t)\, \mathrm{d}t + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{voor} \quad h \to 0.$$

(d) Geef (als je dat nog niet in (b) gedaan hebt) voor $Q_n(f)$ een uitdrukking waarmee je $Q_n(f)$ zo efficiënt mogelijke kunt uitrekenen. Vergelijk deze formule met de gerepeteerde trapezium regel (bespreek voor en nadelen voor praktisch gebruik). Maakt het nog uit of je met een vaste h werkt (van te voren zo gekozen dat de fout voldoende klein is) of dat je met automatische integratie de computer een geschikte h laat bepalen?