Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WIS311 werd in 2003/2004 gegeven door Dr. E. van den Ban.

Complexe Functies (WIS311)
25 februari 2004

- Geef niet alleen antwoorden; laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het boek gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Alle vier opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1. Deze opgave bestaat uit twee delen, (a) en (b), die onafhankelijk van elkaar zijn.

(a) Toon aan dat door
$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 z^n$$
een holomorfe functie f op de eenheidsschijf $D = D(0;1)$ wordt gedefinieerd. Laat zien dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat de functie $g = 1/f$ holomorf is op de gereduceerde omgeving $D(0;\delta) \setminus \{0\}$ en daarop gegeven wordt door een Laurentreeks van de vorm:
$$g(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} a_n z^n \qquad (0 < |z| < \delta).$$
Bepaal tenslotte de coëfficiënten a_{-2}, a_{-1} van die Laurentreeks.

(b) We beschouwen de open verzameling $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Toon aan dat door
$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{z + n^2}$$
een holomorfe functie h op U gedefinieerd wordt.

Opgave 2. We beschouwen de polynomiale functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = z^8 + 4z^7 - iz + 1$.

(a) Bepaal het aantal nulpunten (geteld met multipliciteiten) van f binnen de cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{1}{2}$.

(b) Idem, binnen de cirkel met middelpunt 0 en straal 1.

(c) Bepaal een $R > 0$ zo dat alle nulpunten van f binnen de cirkel $|z| = R$ liggen. Bewijs de juistheid van uw bewering.

Opgave 3. In deze opgave is a een reëel getal met $a > 1$. We beschouwen de integraal
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \sin t}\, dt.$$

(a) Toon aan dat er een meromorfe functie f op $\mathbb{C}$ bestaat zo dat geen der polen van f op de eenheidscirkel $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ligt, en zo dat
$$I = \int_S f(z)\, dz.$$
Hierbij is S georiënteerd tegen de klokrichting in.

(b) Bepaal alle polen van f, en voor elk daarvan: 1) de orde van de pool en 2) het residu van f in de pool.

(c) Bewijs dat $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Opgave 4. In deze opgave is a een reëel getal met $-1 < a < 1$. Laat S de deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn die bestaat uit de punten yi met $y \leq 0$ (het negatieve deel van de y-as). We definiëren de open deelverzameling U van $\mathbb{C}$ door $U := \mathbb{C} \setminus S$.

(a) Toon aan dat er precies één holomorfe functie $l : U \to \mathbb{C}$ bestaat met $l(x) = \log x$ voor alle $x \in]\,0, \infty\,[$.

(b) Toon aan dat er precies één holomorfe functie $f : U \to \mathbb{C}$ bestaat met $f(x) = x^a$ voor alle $x \in]\,0, \infty\,[$. Laat zien dat $|f(z)| = |z|^a$ voor alle $z \in U$.

(c) Voor $0 < \varepsilon < R$ noteren we het lijnstuk van $-R$ naar $-\varepsilon$ in $\mathbb{C}$ met $L_{\varepsilon,R}$. Bewijs dat

$$\int_{L_{\varepsilon,R}} \frac{f(z)}{1+z^2}\, dz = e^{\pi a i} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^a}{1+x^2}\, dx.$$

(d) Voor iedere $r > 0$ definiëren we de geparametrizeerde halve cirkelboog $\sigma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ door $\sigma_r(t) = re^{it}$. Toon aan dat

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(z)}{1+z^2}\, dz = 0.$$

In het vervolg mag u gebruiken dat ook

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\sigma_R} \frac{f(z)}{1+z^2}\, dz = 0.$$

(e) Bewijs dat

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2\cos(\frac{\pi a}{2})}.$$