Uitwerking Quiz M & I, 29-3-12, 15:00-17:00

Opgave 1 [30 pt]. Beschouw op $X := [0,1]$ met $\mathcal{A} := \mathcal{B}[0,1]$ als σ-algebra, de volgende functie $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$: voor elke $A \in \mathcal{A}$ is $\mu(A)$ het aantal rationale getallen dat in de verzameling A ligt. Beantwoord de volgende vragen.
a. Bewijs dat μ een maat is op $(X, \mathcal{A})$.
b. Is de maat μ σ-eindig op $(X, \mathcal{A})$? Zoja, geef dan een bewijs. Zonee, leg dan uit waarom.

Opgave 2 [35 pt]. Zij X een verzameling. Een collectie deelverzamelingen $\mathcal{C} \subset 2^X$ heet *monotone klasse* als geldt: (i) als $A_n \uparrow A$ en $A_n \in \mathcal{C}$, dan $A \in \mathcal{C}$, (ii) als $A_n \downarrow A$ en $A_n \in \mathcal{C}$, dan $A \in \mathcal{C}$.
a. Bewijs: als $\mathcal{B} \subset 2^X$ een collectie deelverzamelingen van X is, dan bestaat er een monotone klasse, genoteerd als $m(\mathcal{B})$, met de volgende twee eigenschappen: (1) $m(\mathcal{B})$ bevat $\mathcal{B}$, (2) voor elke monotone klasse $\mathcal{C}$ met $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ geldt $\mathcal{C} \supset m(\mathcal{B})$.
b. Bewijs vanuit basis-principes en zonder gebruik te maken van enige huiswerk-opgave: als $\mathcal{A} \subset 2^X$ een algebra op X is (dus: $\mathcal{A}$ bevat X, is gesloten voor complement-vorming en is gesloten voor **eindige** verenigingen), dan geldt $\sigma(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$.

Opgave 3 [35 pt]. Toon aan: er is een $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ met de volgende eigenschap: voor elk open, begrensd en niet-leeg interval $I \subset \mathbb{R}$ geldt: $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$. Hier stelt λ de Lebesgue maat op $\mathbb{R}$ voor. *Aanwijzing:* De ternaire verzameling C van Cantor (= Problem 7.10 uit Schilling's boek) vormde een huiswerkopgave. Die C, zelfs indien periodiek herhaald, is niet geschikt om als A te dienen, want C werd geconstrueerd als door in de n-de stap "middenstukken weg te happen" van totale lengte $\lambda((F_n) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ (pro memorie: $F_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $F_2 := (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, etc.). Daardoor wordt "teveel weggehapt", wat resulteert in $\lambda(C) = 0$. Om een geschikte A te krijgen moet je deze procedure nu wijzigen door in elke n-de stap "wat minder weg te happen".

[1] In Problem 3.11 is de genererende collectie, die daar $\mathcal{M}$ is genoemd, gesloten voor *willekeurige* verenigingen en doorsneden, terwijl dat in deze quizopgave alleen geldt voor *monotone* verenigingen en doorsneden. De naam "monotone class" die Schilling in Problem 3.11 gebruikt is dus taalkundig niet terecht, terwijl dat in deze opgave wel zo is.