Uitwerking Quiz M & I, 29-3-12, 15:00-17:00

Opgave 1 [30 pt]. Beschouw op $X := [0,1]$ met $\mathcal{A} := \mathcal{B}[0,1]$ als σ-algebra, de volgende functie $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$: voor elke $A \in \mathcal{A}$ is $\mu(A)$ het aantal rationale getallen dat in de verzameling A ligt. Beantwoord de volgende vragen.
a. Bewijs dat μ een maat is op $(X, \mathcal{A})$.
b. Is de maat μ σ-eindig op $(X, \mathcal{A})$? Zoja, geef dan een bewijs. Zonee, leg dan uit waarom.

Oplossing. a. Zij $R := \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ de verzameling van alle rationale getallen in $[0,1]$; deze is aftelbaar. Dan geldt: $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{r_n}$. Dus is μ een maat volgens Problem 4.6 (eventueel herhaal je het argument daaruit m.b.v. de "baby Fubini identiteit" van het college).

b. Kies de volgende onderling disjuncte aftelbare collectie $\{E_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ met $\cup_n E_n = X$: zij $E_n := \{r_n\}$ als $n \geq 1$ en zij $E_0 := [0,1] \backslash R$. Dan $\mu(E_n) = 1 < +\infty$ als $n \geq 1$ en $\mu(E_0) = 0 < +\infty$. Dus μ is σ-eindig op $(X, \mathcal{A})$.

Opgave 2 [35 pt]. Zij X een verzameling. Een collectie deelverzamelingen $\mathcal{C} \subset 2^X$ heet *monotone klasse* als geldt: (*i*) als $A_n \uparrow A$ en $A_n \in \mathcal{C}$, dan $A \in \mathcal{C}$, (*ii*) als $A_n \downarrow A$ en $A_n \in \mathcal{C}$, dan $A \in \mathcal{C}$.
a. Bewijs: als $\mathcal{B} \subset 2^X$ een collectie deelverzamelingen van X is, dan bestaat er een monotone klasse, genoteerd als $m(\mathcal{B})$, met de volgende twee eigenschappen: (1) $m(\mathcal{B})$ bevat $\mathcal{B}$, (2) voor elke monotone klasse $\mathcal{C}$ met $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ geldt $\mathcal{C} \supset m(\mathcal{B})$.
b. Bewijs vanuit basis-principes en zonder gebruik te maken van enige huiswerk-opgave: als $\mathcal{A} \subset 2^X$ een algebra op X is (dus: $\mathcal{A}$ bevat X, is gesloten voor complement-vorming en is gesloten voor **eindige** verenigingen), dan geldt $\sigma(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$.

Oplossing. De aanpak van dit probleem is alsvolgt. Zie Problem 3.11 t.a.v. onderdeel a en t.a.v. stap 2 hieronder. Zie ook het bewijs van Theorem 5.5 (maar nu veel eenvoudiger) t.a.v. stap 3 hieronder.[1]

a. Laat $m(\mathcal{B})$ de doorsnede zijn van alle monotone klassen $\mathcal{D} \subset 2^X$ waarvoor geldt $\mathcal{D} \supset \mathcal{B}$. Deze heeft evident de eigenschap (1). Ook (2) is evident: immers, aan de doorsnede welke $m(\mathcal{B})$ definieert, doet ook de klasse $\mathcal{C}$ uit (2) mee. Tenslotte moet je alleen nog bewijzen dat $m(\mathcal{B})$ zelf een monotone klasse is: zij $A_n \uparrow A$ met $A_n \in m(\mathcal{B})$ voor elke n. Dan geldt voor elke monotone klasse $\mathcal{D}$ die $\mathcal{B}$ omvat dat $\mathcal{D} \supset m(\mathcal{B})$, dus behoren alle A_n tot $\mathcal{D}$. Wegens $A_n \uparrow A$ volgt dan $A \in \mathcal{D}$. Omdat $\mathcal{D} \supset \mathcal{B}$ willekeurig was, volgt nu $A \in m(\mathcal{B})$ vanwege de definitie van $m(\mathcal{B})$. Het argument voor $A_n \downarrow A$ met $A_n \in m(\mathcal{B})$ voor elke n volgt door in bovenstaande afleiding systematisch $\uparrow$ te vervangen door $\downarrow$. Dus is $m(\mathcal{B})$ een monotone klasse.

[1] In Problem 3.11 is de genererende collectie, die daar $\mathcal{M}$ is genoemd, gesloten voor *willekeurige* verenigingen en doorsneden, terwijl dat in deze quizopgave alleen geldt voor *monotone* verenigingen en doorsneden. De naam "monotone class" die Schilling in Problem 3.11 gebruikt is dus taalkundig niet terecht, terwijl dat in deze opgave wel zo is.

b. Omdat elke σ-algebra automatisch een monotone klasse is, volgt $\mathcal{A} \subset m(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ (immers, de collectie van alle monotone klassen $\mathcal{D} \subset 2^X$ met $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ bevat de collectie van alle σ-algebras $\mathcal{D} \subset 2^X$ met $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$). Om de omgekeerde inclusie $m(\mathcal{A}) \supset \sigma(\mathcal{A})$ te bewijzen, is het voldoende om te bewijzen dat $m(\mathcal{A})$ (die sowieso $\mathcal{A}$ omvat) een σ-algebra is. Dit gebeurt in onderstaande stappen 1 t.e.m. 4.

Stap 1. Er geldt $X \in \mathcal{A} \subset m(\mathcal{A})$.

Stap 2. Nu bewijs je $A \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A^c \in m(\mathcal{A})$.

Zij $\mathcal{M}$ de collectie van alle "goede verzamelingen" voor stap 2, d.w.z. de verzamelingen $A \in m(\mathcal{A})$ waarvoor geldt $A^c \in m(\mathcal{A})$. Deze $\mathcal{M}$ bevat $\mathcal{A}$ (evident, want $\mathcal{A}$ is een algebra). Ook is $\mathcal{M}$ een monotone klasse, want monotone limieten van "goede verzamelingen" zijn zelf ook "goed". Immers, (1) als $A_n \uparrow A$ en $A_n \in \mathcal{M}$, dan $A_n^c \in m(\mathcal{A})$; dus uit $A_n^c \downarrow A^c$ en het feit dat $m(\mathcal{A})$ monotone klasse is, volgt dan $A^c \in m(\mathcal{A})$ en dus behoort A tot $\mathcal{M}$, (2) als $A_n \downarrow A$ en $A_n \in \mathcal{M}$ toont precies dezelfde redenering (met $\uparrow$ en $\downarrow$ systematisch van rol verwisseld) aan dat $A \in \mathcal{M}$. Samenvattend: hierboven is aangetoond dat $\mathcal{M}$ een monotone klasse is met $\mathcal{M} \supset \mathcal{A}$. Gevolg: $\mathcal{M} \supset m(\mathcal{A})$, dus $m(\mathcal{A})$ is gesloten voor het nemen van complementen.

Stap 3. Vervolgens bewijs je $A, B \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{A})$.

Kies $A \in \mathcal{A}$ willekeurig en vorm $\mathcal{M}_A := \{C \in m(\mathcal{A}) : A \cap C \in m(\mathcal{A})\}$. Dan is $\mathcal{M}_A$ evident een monotone klasse: $C_j \uparrow C$ impliceert $A \cap C_j \uparrow A \cap C$ en $C_j \downarrow C$ impliceert $A \cap C_j \downarrow A \cap C$, dus uit $\{C_j\}_j \subset \mathcal{M}_A$ volgt $C \in \mathcal{M}_A$. Ook geldt $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$, omdat $\mathcal{A}$ gesloten is voor intersecties. Dus volgt $\mathcal{M}_A \supset m(\mathcal{A})$. Wegens de willekeurigheid van $A \in \mathcal{A}$ hebben we nu dus bewezen

$$A \in \mathcal{A} \text{ en } B \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A \cap B \in m(\mathcal{A}). \tag{1}$$

Kies nu $B \in m(\mathcal{A})$ willekeurig en vorm $\mathcal{M}_B := \{C \in m(\mathcal{A}) : C \cap B \in m(\mathcal{A})\}$. Net als hierboven is $\mathcal{M}_B$ evident een monotone klasse. Ook geldt $\mathcal{M}_B \supset \mathcal{A}$, wegens (1). Dus volgt $\mathcal{M}_B \supset m(\mathcal{A})$. Wegens de willekeurigheid van $B \in m(\mathcal{A})$ hebben we nu bewezen dat uit $A, B \in m(\mathcal{A})$ volgt $A \cap B \in m(\mathcal{A})$.

Stap 4. Tenslotte bewijs je $\{A_j\}_j \in m(\mathcal{A}) \Rightarrow A := \cup_j A_j \in m(\mathcal{A})$.

Uit herhaling van stap 3 en de Morgan regels geven de stappen 2-3 dat $m(\mathcal{A})$ gesloten is voor eindige verenigingen. Dus voor elke n is $B_n := \{A_j\}_{j=1}^n \in m(\mathcal{A})$. Omdat $m(\mathcal{A})$ automatisch gesloten is voor monotone verenigingen, volgt $A \in m(\mathcal{A})$ uit $B_n \uparrow A$.

Opgave 3 [35 pt]. Toon aan: er is een $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ met de volgende eigenschap: voor elk open, begrensd en niet-leeg interval $I \subset \mathbb{R}$ geldt: $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$. Hier stelt λ de Lebesgue maat op $\mathbb{R}$ voor. *Aanwijzing:* De ternaire verzameling C van Cantor (= Problem 7.10 uit Schilling's boek) vormde een huiswerkopgave. Die C, zelfs indien periodiek herhaald, is niet geschikt om als A te dienen, want C werd geconstrueerd als door in de n-de stap "middenstukken weg te happen" van totale lengte $\lambda((F_n) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ (pro memorie: $F_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $F_2 := (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, etc.). Daardoor wordt "teveel weggehapt", wat resulteert in $\lambda(C) = 0$. Om een geschikte A te krijgen moet je deze procedure nu wijzigen door in elke n-de stap "wat minder weg te happen".

Oplossing. De aanwijzing suggereert dat je A moet definiëren als een periodiek herhaalde verzameling $B \subset [0, 1]$. Als voor B namelijk geldt:

$$\forall_{I \in \mathcal{J}^1[0,1]} 0 < \lambda(B \cap I) < \lambda(I) \tag{2}$$

dan ben je eigenlijk al klaar: immers, als $\lambda(I) > 0$ dan is voor minstens 1 geheeltallige n ook $\lambda(I) > \lambda(I \cap (n+B)) > 0$ (zet dan $A := \cup_n(n+B)$). Je kunt eerst opmerken dat "teveel weggehapt" klopt, want in totaal wordt in Problem 7.10 "weggehapt"

$$\lambda(\cup_n F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k = 1 = \lambda([0,1]).$$

Construeer nu bijvoorbeeld, hoe dan ook, nieuwe "happen" G_n met $\lambda(G_n) = \alpha(\frac{1}{2})^n$ (om alvast Cantor na te bootsen laat je zodadelijk elke G_n de vereniging zijn van 2^{n-1} disjuncte intervallen – die moeten elk dus lengte $\alpha 2^{-2n+1}$ hebben). Hier geldt $0 < \alpha < 1$. Zo bereik je in elk geval dat $\lambda(\cup_n G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\frac{1}{2})^n = \alpha < 1$. Volgens deze opzet is voor G_1 aan maat beschikbaar $\frac{\alpha}{2} = \lambda(G_1)$. Deze G_1 bestaat uit één interval. Dus wordt G_1 het middenstuk $(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4})$. Voor G_2 is aan maat beschikbaar $\frac{\alpha}{4} = \lambda(G_2)$, te verdelen over twee intervallen. Dus G_2 wordt de vereniging van $(\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{16}, \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{16})$ en $(\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{16}, \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{16})$, etc. Zo wordt G_n de vereniging van 2^{n-1} disjuncte open intervallen $I_j^{(n)}$, waarvan elk lengte $\alpha 2^{-2n+1}$ heeft en gecentreerd is rond een middenpunt $\frac{j}{2^n}$ met j oneven, $1 \leq j < 2^n$. Net als de echte Cantorverzameling kan daarom de verzameling $C_{1-\alpha} := [0,1] \setminus \cup_n G_n$ (die compact is en maat $1-\alpha > 0$ heeft), geen open intervallen bevatten. Door te schalen kun je deze *Cantorachtige deelverzamelingen* binnen elk gewenst open interval $J := (a,b) \subset [0,1]$ alsvolgt laten opduiken: zij ϕ de functie $\phi(t) := (b-a)t + a$ op $[0,1]$ en beschouw alle $\phi(C_{1-\alpha})$'s; deze zijn compact, bevatten geen deelinterval van (a,b) en hebben positieve maat.

Merk alvast op dat het voor de gezochte verzameling B voldoende is om de volgende eigenschap te hebben: voor elk *rationaal* interval $I \in \mathcal{J}_{rat}^1[0,1]$ geldt (2). Zij $\{I_n\}_n$ een aftelling van $\mathcal{J}_{rat}^1$. Kies in I_1 twee disjuncte Cantorachtige deelverzamelingen $\bar{A}_1$ en $\tilde{A}_1$ (knip I_1 daartoe in twee stukken en pas de bovenstaande schaling toe op elk van beide stukken). Dan is de open verzameling $I_2 \setminus (\bar{A}_1 \dot{\cup} \tilde{A}_1)$ niet leeg, want anders had je $\bar{A}_1 \dot{\cup} \tilde{A}_1 \supset I_2$. Dat laatste kan niet, want noch $\bar{A}_1$ noch $\tilde{A}_1$ kan op zichzelf het open interval I_2 bevatten (zie boven), dus zou dan gelden $D_1 := \bar{A}_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ en $D_2 := \tilde{A}_1 \cap I_2 \neq \emptyset$; echter $\bar{A}_1$ en $\tilde{A}_1$ zijn gesloten, en wegens $I_2 = D_1 \dot{\cup} D_2$ zou dat tegenspraak geven met het feit dat I_2 samenhangend is. Gevolg: $I_2 \setminus (\bar{A}_1 \dot{\cup} \tilde{A}_1)$ bevat minstens één punt. Maar dan bevat die open verzameling dus ook een open interval; kies binnen dat interval weer twee disjuncte Cantorachtige deelverzamelingen $\bar{A}_2$ en $\tilde{A}_2$. Vervolgens is dan de open verzameling $I_3 \setminus (\bar{A}_1 \dot{\cup} \tilde{A}_1 \dot{\cup} \bar{A}_2 \dot{\cup} \tilde{A}_2)$ niet leeg (immers I_3 is samenhangend etc. etc.) en bevat dus een open interval; kies binnen dat laatste interval weer twee disjuncte Cantorachtige deelverzamelingen $\bar{A}_3$ en $\tilde{A}_3$, etc. etc. Zo krijg je twee rijen $\{\bar{A}_n\}_n$ en $\{\tilde{A}_n\}_n$ van Cantorachtige deelverzamelingen. Zij nu $B := \cup_n \bar{A}_n$. Dan voldoet B aan (2). Immers, zij $I \subset [0,1]$ een willekeurig open interval. Dan is er een n met $I_n \subset I$, en dus ook met $\bar{A}_n, \tilde{A}_n \subset I$. Nu $0 < \lambda(\bar{A}_n) \leq \lambda(B \cap I)$. Maar ook volgt uit bovenstaande constructie dat $B \cap I$ bevat is in $I \setminus \tilde{A}_n$, dus $\lambda(B \cap I) < \lambda(I)$ wegens $\lambda(\tilde{A}_n) > 0$.

Commentaar. Voor deze opgave had de hint veel uitgebreider moeten zijn! Daarmee is bij de beoordeling sterk rekening gehouden.