Eerste Deeltentamen Distributies

Woensdag 20 April 2011

14.00 - 17.00

N.B. Geef niet alleen antwoorden, maar geef ook de volledige argumentatie waar het antwoord uit volgt.

Opgave 1 (6 punten) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaal integreerbaar. Definieer voor $h \in \mathbb{R}$ de functie $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$f_h(x) = f(x+h) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(i, 1pt) Toon aan dat in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} (\operatorname{test} f_h - \operatorname{test} f)$$

bestaat. Noem de limiet u.

(ii, $\frac{1}{2}$pt) Geef een voldoende voorwaarde op f zodat u van orde nul is.

(iii, $\frac{1}{2}$pt) Geef een bovengrens voor de orde van u die geldig is voor alle lokaal integreerbare functies f.

(iv, 1pt) Geef een *scherpe* bovengrens voor de orde van u, d.w.z. geef zowel een bovengrens als een voorbeeld van een lokaal integreerbare f zodat de orde van u gelijk is aan deze bovengrens.

(v, 1pt) Zij

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x+1 & (x>0) \end{cases}$$

Bepaal u.

(vi, 1pt) Voor de f en u uit (v), bepaal zowel de drager als de singuliere drager van zowel $\operatorname{test} f$ als van u.

(vii, 1pt) Met nog steeds de f en u uit (v):

- Is $\operatorname{test} f$ positief?
- Is u positief?
- Is ∂u positief?

Opgave 2 (4 punten) Definieer voor $t \in \mathbb{R}$ de afbeelding $\Phi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$\Phi_t(x) = xe^{-t} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(i, $1\frac{1}{2}$pt) Toon aan dat voor $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ de pullback $\Phi_t^*\phi$ voor $t \to \infty$ convergeert in $C^\infty(\mathbb{R})$ en bepaal de limiet.

(ii, $1\frac{1}{2}$pt) Toon aan dat voor iedere $t \geq 0$ en iedere $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ook $\Phi_t^*\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Convergeert $\Phi_t^*\phi$ in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ voor $t \to \infty$?

(iii, 1pt) Toon aan dat voor $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ de pushforward $\Phi_{t*}u$ convergeert in $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ voor $t \to \infty$ en bepaal de limiet.

EINDE