Tentamen Distributies 1 juli 2016

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Voor $\Sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto x + t$ en $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ beschouw $v := \Sigma^* u$.

   (a) Leg uit hoe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   (b) Ga na dat v de golfvergelijking

   $$\partial_t^2 v \quad = \quad \partial_x^2 v \tag{1}$$

   oplost.

   (c) Definieer $\Lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(t, x) \mapsto (t, -x)$ en laat zien dat voor elke oplossing $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ van (1) ook $\Lambda^* v$ een oplossing van (1) is.

   (d) Onderzoek of de continue functie $h(t, x) = |x + ct| + |x - ct|$ een oplossing is van de golfvergelijking $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)h = 0$ met golfsnelheid $c > 0$ — en beargumenteer de juistheid van je antwoord. *Hint:* doe dit eerst voor $c = 1$.

2. Zij $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een monotoon stijgende en van links continue functie en $\partial g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ haar afgeleide. Deze positieve distributie correspondeert met een maat μ op $\mathbb{R}$ waarvoor

   $$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b[} \, \mathrm{d}\mu \quad = \quad g(b) \; - \; g(a)$$

   voor alle $a < b \in \mathbb{R}$; hier is $\chi_{[a,b[}$ de karakteristieke functie van het interval $[a, b[$. Voor $g(x) = x$ is dit de Lebesgue-maat λ op $\mathbb{R}$.

(a) Verifieer dat g dan en slechts dan continu is in $a \in \mathbb{R}$ als de eenpuntsverzameling $\{a\}$ een μ–verwaarloosbare verzameling is.

(b) Toon aan dat
$$\mu \;=\; \nu + \sum_{a \in A} \mu_a \delta_a$$
waar $\mu_a = \mu(\{a\})$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aftelbaar en ν gegeven door ∂f met $f \in C(\mathbb{R})$ monotoon stijgend.

(c) Indien $\partial g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \lambda)$ laat zien dat elke λ–verwaarloosbare verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ ook μ–verwaarloosbaar is en concludeer dat g continu is.

Definieer $h(x) := 0$ voor $x \leq 0$, $h(x) := 1$ voor $x \geq 1$ en
$$h\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}\Big) \;:=\; \sum_{i=1}^{N(x)} 2^{-i} \Big\lceil \frac{x_i}{2} \Big\rceil$$
met $x = \sum 3^{-i} x_i \in \,]0,1[$, $x_i \in \{0,1,2\}$ de 3–adische ontbinding, $N(x) = \infty$ als $x_i \neq 1$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ en anders $N(x) = i$ minimaal met $x_i = 1$, en $\lceil y \rceil = \min\{\ell \in \mathbb{Z} \mid y \leq \ell\}$. *Hint:* probeer een plaatje te schetsen!

(d) Ga na dat deze functie h monotoon stijgend en continu is.

(e) Bewijs dat $\partial h \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \lambda)$. Wat is de samenhang met de klassieke afgeleide h' ?

3. Een gematigde distributie is een element van $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(a) Voor welke $a \in \mathbb{C}^n$ definieert $\mathrm{e}_a(x) = \mathrm{e}^{\langle a|x\rangle}$ een gematigde distributie?

(b) Onder welke (noodzakelijke en voldoende) voorwaarde aan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ is
$$u \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_k$$
een gematigde distributie op $\mathbb{R}$?

(c) Toon aan dat een gematigde distributie eindige orde heeft.

(d) Geef een oplossing van de partiële differentiaalvergelijking
$$\partial_x^4 u \;-\; \partial_y^2 u \;=\; f \;-\; u$$
voor $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$. Lukt dit ook voor $f(x,y) = \mathrm{e}^{+(x^2+y^2)/2}$?
Voorkomende integralen hoeven niet te worden uitgewerkt.