Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WIS314 werd in 2004 gegeven door Joop Kolk.

# Distributies (huiswerktentamen) (WIS314)
# najaar 2004

- De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.
- Beweringen mogen worden bewezen door verwijzing naar Stellingen, Lemmas, etc. en ook Vraagstukken uit de syllabus **Distributies** die voor de werkcolleges zijn opgegeven; men wordt zelfs aangespoord dat zoveel mogelijk op deze wijze te doen.
- De gewichten van de vraagstukken bij de bepaling van het cijfer zijn 20, 30, 30 en 20 respectievelijk.
- Dit is het eerste gedeelte van het tentamen. Lever het volledige werk pas in na voltooiing van het tweede gedeelte.
- Eventueel wordt men na inlevering uitgenodigd door de docent voor een mondelinge toelichting van het werk en/of verdere bespreking van de stof. De kans dat dit gebeurt is gering voor studenten die actief hebben deelgenomen aan het vraagstukkenuur.
- Zit men op een essentieel punt vast, aarzel dan niet om contact te zoeken per e-mail met `kolk@math.uu.nl`.

## References

[MRA] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk. – Syllabus Analyse in Meer Variabelen: *Multidimensional Real Analysis*

### Opgave 1. Cauchy-Riemann-operator

In dit vraagstuk is de notatie zoals in Voorbeeld 12.6. We willen fundamentele oplossing $E$ bepalen voor de Cauchy-Riemann-operator $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ door middel van Fourier-transformatie. Met andere woorden, met die transformatie lossen we de volgende partiële differentiaalvergelijking voor $E$ op $\mathbb{R}^2$ op:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) - \frac{1}{i}\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = 2\delta(x,y) = 2\delta(x)\delta(y).$$

Veronderstel hiertoe dat $x \to E(x,\cdot)$ een $C^1$ familie in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ is en leid middels Fouriertransformatie met betrekking tot de andere variabele af dat dan geldt

$$\frac{d\mathscr{F}E}{dx}(x,\eta) - \eta\mathscr{F}E(x,\eta) = 2\delta(x)$$

Hierbij geeft $\mathscr{F}E$ de partiële Fouriergetransformeerde aan. Noteer met $H$ de Heavisidefunctie op $\mathbb{R}$ en bewijs dat met een nader te bpalen functie $\eta \to c(\eta)$ geldt

$$\mathscr{F}E(x,\eta) = 2(c(\eta) + H(x))e^{x\eta} \quad ((x,\eta) \in \mathbb{R}^2$$

Merk op dat $\eta \to e^{x\eta}$ geen gematigde distributie op $\mathbb{R}$ indien $x\eta > 0$. Ondervang dit probleem middels de keuze $c(\eta) = -H(\eta)$ en laat zien dat in dit geval

$$\mathscr{F}E(x\eta) = -2\mathrm{sgn}H(-x\mathrm{sgn}(\eta))e^{x\eta} \quad ((x,\eta) \in R^2).$$

Bewijs dat nu geldt

$$E(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x+iy}, \qquad \text{d.w.z} \qquad E(z) = \frac{1}{\pi z}$$

en dat $E$ inderdaad een gematigde distributie op $\mathbb{C}$ is.

## Opgave 2. Laplace-operator.

In dit vraagstuk construeren we een fundamentele oplossing voor de Laplace-operator $\Delta$ op $\mathbb{R}^n$ op een wijze analoog aan die in Hoofdstuk 13 over fractionele integratie en differentiatie. Defineer hiertoe voor $a \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}a > n-1$, de functie $R^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ door

$$R^a(x) = c(a)||x||^{a-n} \quad \text{waarbij} \quad d(a) = \frac{2\Gamma(\frac{a-n+2}{2})}{c_n\Gamma(\frac{a}{2})}.$$

Bewijs dat $R^a$ een locaal integreerbare functie op $\mathbb{R}^2$ is en bijgevolg een distributie in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiëert. Toon aan dat in feite $R^a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ en verifieer

$$R^a(e^{-||\cdot||^2}) = 1$$

Ga na dat $a \to c(a)$ een uitbreiding heeft tot een complex-analystisch functie op $\mathbb{C}$. Zij $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de kwadratische vorm $x \to ||x||^2$ en ga na dat $q : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ een $C^\infty$ overstroming is. Bewijs nu dat op $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ en voor $\mathrm{Re}a > n-1$ geldt

$$R^a = d(a)q^*\left(\chi_+^{\frac{a-n+2}{2})}\right) \quad \text{waarbij} \quad d(a) = \frac{2\Gamma(\frac{a-n+2}{2}}{c_n\Gamma(\frac{a}{2})}.$$

Toon nu op twee verschillende manieren aan dat geldt, voor $\mathrm{Re}a > n-1$,

$$\Delta R^a = 2(a-n)R^{a-2}.$$

Bewijs dat bijgevolg voor alle $a \in \mathbb{C}$ de distributie $R^a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ kan worden gedefiniëerd door

$$R^a = \Delta^k R^{a+2k} \quad \text{indien} \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathrm{Re}a + 2k > n-1.$$

Merk nu op dat $R^0 = 0$ in $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ en laat zien dat $R^0 = \delta$. Zij nu $n \neq 2$ en concludeer

$$\Delta\left(\frac{||\cdot||^{2-n}}{(2-n)c_n}\right) = \delta;$$

hiermee is de fundamentele oplossing voor $\Delta$ uit Vraagstuk 4.6 gevonden. Laat algemener zien dat

$$R^{-2k} = \frac{(-1)^k\Delta^k\delta}{2^k n(n+2)\cdots(n+2k-2)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Bewijs voor alle $a \in \mathbb{C}$ dat $R^a$ homogeen is van de graad $a-n$ en invariant onder de orthogonale groep van $\mathbb{R}^n$.

## Opgave 3. Sommatieformule van Poisson.

Definieer $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ door

$$u = \frac{1}{2}\delta + \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{2\pi n}$$

en toon aan dat $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Concludeer de volgendde gelijkheid van distributies in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{F}u = \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} e_{-2\pi ik}.$$

Bewijs dat $u = \lim_{\epsilon\downarrow 0} e^{-\epsilon x}u$ in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ en verder dat

$$\mathscr{F}u = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(\frac{1}{2i} + \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\epsilon 2\pi k} e_{-2\pi ik}\right).$$

Toon aan middels sommatie van een meetkundige reeks

$$\mathscr{F}u(\xi) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{2i}\cot\pi(\xi - i\epsilon) =: \frac{1}{2i}\cot\pi(\xi - i0).$$

Gebruik nu $\mathscr{F}S = S\mathscr{F}$ en optelling van de resulterende identiteiten om te concluderen

$$2i\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ik\xi} = \cot\pi(\xi - i0) - \cot\pi(\xi + i0).$$

Toon anderzijds aan dat de complex-analytische functie $z \to \pi\cot\pi z$ op $\mathbb{C}$ een enkelvoudige pool met residu 1 heeft in ieder punt $z = n$, voor $n \in \mathbb{Z}$. Concludeer met behulp van de formule van Sokhotsky $\frac{1}{\xi - i0} - \frac{1}{\xi + i0} = 2\pi i\delta$ dat geldt

$$\cot\pi(\xi - i0) - \cot\pi(\xi + i0) = 2i\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n; \quad \text{en deduceer} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{2\pi ik} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n,$$

waarbij de laatstgenoemde identiteit van getemperde distributies de sommatieformule van Poission uit Formule 15.8 en Vraagstuk 10.8 is. Bewijs

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta'_{n(x)}(x) - 4\pi\sum_{k\in\mathbb{N}} k\sin 2\pi kx.$$

Bewijs ook de volgende variant van de sommatieformule van Poisson, geldig voor een functie $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ en $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{F}\phi(2\pi k)e^{\pi ikx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\phi)x + n).$$

Definieer vervolgens, voor $x \in \mathbb{R}$,

$$s(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\cos kx}{1 + k^2}.$$

Toon aan dat geldt, voor $0 \le x \le 2\pi$,

$$s(x) = \frac{1}{2}\left(\pi\frac{\cosh(x - \pi)}{\sinh\pi} - 1\right).$$

Merk hiertoe op dat de sommatieformule van Poisson impliceert dat

$$s(x) - s''(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\cos kx = \frac{1}{2} + \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi n}.$$

Los nu $s$ op uit deze differentiaalvergelijking gebruikmakend van het feit dat $s$ even en periodiek is. Concludeer (vergelijk met [MRA, Excercise 6.91.(iii)])

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{1 + k^2} = \frac{1}{2}(-1 + \pi\coth) = 1,076674047468581\cdots$$

## Opgave 4. Integratie van totale afgeleide.

In dit vraagstuk is de notatie als in Stelling 10.7. In het bijzonder, zij $\Phi : X \to Y$ een $C^\infty$ afbeelding van open verzamelingen $X \subset \mathbb{R}^n$ en $Y \subset \mathbb{R}^p$ en zij $\phi \in C^\infty(Y)$. Bewijs

$$\partial_j(\Phi^*\phi) = \sum_{k=1}^{p} \partial_j \Phi_k \Phi^*(\partial_k \phi).$$

Veronderstel nu bovendien dat $\Phi$ een $C^\infty$ overstroming is. Toon aan dat de bovenstaande identiteit ook geldt met $\phi \in C^\infty(Y)$ vervangen door $u \in \mathscr{D}'(Y)$. Veronderstel in het vervolg dat $Y = \mathbb{R}$, definieer de open verzameling $\Omega$ als $\{x \in R^n | \Phi(x) > 0\}$ en neem aan dat $\Omega \neq \emptyset$. Merk op dat de rand $\partial\Omega$ van $\Omega$ gelijk is aan $\Phi^{-1}(\{0\})$ en dat deze verzameling een $C^\infty$ deelvariëteit in $\mathbb{R}^n$ van dimensie $n-1$ is. Bewijs, in de notatie van Voorbeeld 7.1,

$$\Phi^*(\delta) = \frac{1}{||\text{grad}\Phi||}\delta_\partial.$$

Deduceer, voor alle $\phi \in C_0^\infty(X)$,

$$\int \partial_j \phi(x) dx = \int_\partial \phi(y)\nu_j(y) d_{n-1}y,$$

waarbij $\nu(y)$ de uitwendige normaal van $\partial\Omega$ in $y$ is. Concludeer dat we langs deze weg [MRA, Stelling 7.6.1] hebben bewezen.