# Tentamen Distributies

**26 januari 2005**

- Schrijf op ieder vel **je naam**, en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, je email adres en het aantal ingeleverde vellen.
- Uiterste inleverdatum: maandag 27 februari.
- Bewaar zelf een copie van het ingeleverde werk.
- Geef niet alleen antwoorden; geef ook een duidelijke redenering ter motivering. Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan met een precieze verwijzing.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.

**Opgave 1. Randwaarden van holomorfe functies**

In deze opgave beschouwen we generalisaties van de distributies $(x + i0)^{-1}$ en $(x - i0)^{-1}$.

In het vervolg noteren we met $z = x+iy$ een complexe variabele. Bovendien identificeren we het element $z \in \mathbb{C}$ met het element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

We beschouwen het bovenhalfvlak

$$H_+ := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

en noteren met $\mathcal{O}(H_+)$ de ruimte van complex differentieerbare functies $H_+ \to \mathbb{C}$.

Voor $N \in \mathbb{N}$ definiëren we de deelruimte $\mathcal{O}_N(H_+)$ van functies $f \in \mathcal{O}(H_+)$ zo dat de functie $|y|^N |f(z)|$ begrensd is op iedere deelverzameling van $H_+$ van de vorm $[a, b] \times ]0, h]$, met $a < b$ en $h > 0$. Bovendien definiëren we

$$\mathcal{O}_*(H_+) = \cup_{N \in \mathbb{N}} \ \mathcal{O}_N(H_+).$$

(a) We definiëren de complex differentieerbare functie $\log_+ : H_+ \to \mathbb{C}$ door $\log_+(z) = \log |z| + i \arg z$, waarbij $0 < \arg z < \pi$. Toon aan dat deze functie tot $\mathcal{O}_1(H_+)$ behoort.

(b) Toon aan dat de functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ tot $\mathcal{O}_1(H_+)$ behoort.

We definiëren de Cauchy-Riemann operator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(c) Zij $V \subset \mathbb{C}$ open. Toon aan dat voor iedere $\psi \in C^\infty(V)$ en iedere $f \in \mathcal{O}(V)$ geldt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\psi f) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\psi) f \quad \text{op} \quad V.$$

(d) Zij $R$ een rechthoek in $V$ van de vorm $R = [a, b] \times [c, d]$ met $a < b$ en $c < d$. Toon aan dat voor alle $\psi \in C^\infty(V)$ en iedere complex differentieerbare functie $f \in \mathcal{O}(V)$ geldt

$$\int_{\partial R} \psi(z)\, f(z)\, dz = 2i \int_R \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) f(z)\, dx\, dy.$$

Hint: gebruik dat $dz = dx + i\, dy$ als complexwaardige eenvorm op te vatten is.

(e) Voor iedere functie $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiëren we de $C^\infty$-functie $\widetilde{\varphi}_N : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ door

$$\widetilde{\varphi}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}\, (iy)^k.$$

Voorts definiëren we de $C^\infty$-functie $R_{\varphi,N} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$R_{\varphi,N}(x) = \frac{i^N\, \varphi^{(N+1)}(x)}{2\, N!}.$$

Toon aan dat voor alle $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \widetilde{\varphi}_N(z) = R_{\varphi,N}(x)\, y^N.$$

In het vervolg is $f \in \mathcal{O}_N(H_+)$.

(f) Zij $a < b$, $0 < h$. Toon aan dat voor elke $\varphi \in C_0^\infty([a,\, b])$ geldt dat

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x) f(x + i\epsilon)\, dx = &\int_a^b \widetilde{\varphi}_N(x + ih) f(x + ih + i\epsilon)\, dx \\ &+ \quad 2i \int_0^h \int_a^b R_{\varphi,N}(x)\, y^N\, f(z + i\epsilon)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

(g) Toon aan dat voor elke $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ de limiet

$$\beta_+(f)(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f(x + i\epsilon)\, dx$$

bestaat. Druk deze limiet uit in de som van twee integralen, en bewijs dat $\beta_+(f)$ een distributie in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ van orde hoogstens $N + 1$ is.

Het bovenstaande geeft een lineaire operator $\beta_+ : \mathcal{O}_*(H_+) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ die we de randwaarde operator zullen noemen (Engels: boundary value map, vandaar de notatie). Merk op dat

$$\frac{1}{x + i0} = \beta_+(\frac{1}{z}).$$

In analogie hiermee schrijven we ook wel $f(x + i0)$ voor $\beta_+(f)$. Met behulp van de Cauchy integraalformule is het niet al te moeilijk aan te tonen dat de complexe differentiatie $d/dz$ de ruimte $\mathcal{O}_N(H_+)$ afbeeldt in $\mathcal{O}_{N+1}(H_+)$. Er volgt dat $d/dz$ een lineaire operator $\mathcal{O}_*(H_+) \to \mathcal{O}_*(H_+)$ definieert.

(h) Laat zien dat voor alle $f \in \mathcal{O}_*(H_+)$ geldt

$$\frac{d}{dx}\beta_+(f) = \beta_+(\frac{d}{dz}f).$$

(i) Voor iedere $a \in \mathbb{C}$ definiëren we de functie $m_+^a : H_+ \to \mathbb{C}$ door

$$m_+^a(z) = e^{a \log_+ z}.$$

Toon aan dat $m_+^a \in \mathcal{O}_*(H_+)$. Voorts definiëren we de distributie $u_+^a := \beta_+(m_+^a)$. Toon aan dat voor elke $a \in \mathbb{C}$ geldt

$$\frac{d}{dx}u_+^a = au_+^{a-1}.$$

Op soortgelijke wijze schrijven we $H_- = \{z \in \mathbb{C} \mid y < 0\}$ voor het complexe onderhalfvlak en definiëren we de randwaarde operator

$$\beta_- : \mathcal{O}_*(H_-) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

door

$$\beta_-(f)(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, f(x - i\epsilon)\, dx,$$

voor $f \in \mathcal{O}_*(H_-)$ en $\varphi \in C_0^\infty(U_{\mathbb{R}})$. Met deze definities geldt dat

$$\frac{1}{x - i0} = \beta_-(\frac{1}{z}).$$

(j) We definiëren de functie $\log_- : H_- \to \mathbb{C}$ door $\log_-(z) = \log|z| + i \arg z$ met $\pi < \arg z < 2\pi$. Laat zien dat

$$\beta_+(\log_+) - \beta_-(\log_-) = -2\pi i H.$$

(k) Laat zien dat voor alle gehele $k \geq 0$ geldt

$$\frac{1}{(x + i0)^{k+1}} - \frac{1}{(x - i0)^{k+1}} = 2\pi i \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{d^k}{dx^k}\, \delta_0.$$

Voor $k = 0$ is dit een bekende identiteit.

(l) Voor $a \in \mathbb{C}$ definiëren we de functie $m_-^a \in \mathcal{O}(H_-)$ door $m_-^a(z) = e^{a \log_- z}$. Als in onderdeel (i) kan aangetoond worden dat $m_-^a \in \mathcal{O}_*(H_-)$. Voor $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ definiëren we de distributie

$$\chi^a := \frac{[\beta_+(m_+^{a-1}) - \beta_-(m_-^{a-1})]}{\Gamma(a)(1 - e^{2a\pi i})}.$$

Hierin is $\Gamma$ de bekende Gamma functie. Bewijs:

(1) $\operatorname{supp} \chi^a \subset [0, \infty[$.

(2) $\chi^a$ is op $]0, \infty[$ gelijk is aan de $C^\infty$-functie $x \mapsto \Gamma(a)^{-1}\, x^{a-1}$.

(3) $\operatorname{sing\,supp} \chi^a \subset \{0\}$.

(m) Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\frac{d}{dx} \chi^{a+1} = \chi^a.$$

(n) Toon aan dat voor elke $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, geldt

$$\lim_{a \to k} \chi^a = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H.$$

(o) Toon aan dat voor elke $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ de functie $a \mapsto \chi^a(\varphi)$, oorspronkelijk gedefinieerd op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, een complex differentieerbare voortzetting heeft tot $\mathbb{C}$.

**Opgave 2. De Klein-Gordon operator**

In deze opgave bestuderen we een fundamentele oplossing van de Klein-Gordon operator $\Box + m^2$. Hierin is $m \in \mathbb{R}, m > 0$, en

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

de golfoperator.

(a) Voor $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, definiëren we de continue functie $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda^{-1} \sin \lambda t & \text{als} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad t < 0. \end{cases}$$

Laat zien dat door $v_\lambda = \operatorname{test}(f_\lambda)$ een getemperde distributie gedefinieerd wordt.

(b) Laat zien dat $\frac{d^2}{dt^2} v_\lambda = -\lambda^2 v_\lambda + \delta_0$.

(c) Laat zien dat de distributie $V_\lambda := \mathcal{F} v_\lambda$ getemperd is en voldoet aan

$$(-\tau^2 + \lambda^2) V_\lambda = 1.$$

(d) Zij $\lambda_0 > 0$. Laat zien dat er een constante $C_0 > 0$ bestaat zo dat voor alle $\lambda \geq \lambda_0$ en alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ geldt

$$|V_\lambda(\varphi)| \leq C_0 \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{\mathcal{S}(0,2)}.$$

(e) Laat zien dat er een constante $C_1 > 0$ bestaat zo dat voor alle $\lambda \geq \lambda_0$ en alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ geldt
$$|V_\lambda(\varphi)| \leq C_1 \|\varphi\|_{\mathcal{S}(2,2)}.$$

(f) Voor $\xi \in \mathbb{R}^n$ schrijven we $\|(\xi, m)\| := \sqrt{\|\xi\|^2 + m^2}$. Is $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dan noteren we voor elke $\xi \in \mathbb{R}^n$ met $\psi_\xi$ de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\psi_\xi(t) = \psi(t, \xi)$. Toon aan dat door
$$V(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} V_{\|(\xi,m)\|}(\psi_\xi)\, d\xi$$
een getemperde distributie op $\mathbb{R}^{n+1}$ gedefinieerd wordt.

(g) Laat zien dat de getemperde distributie $E := \mathcal{F}^{-1} V \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ een fundamentele oplossing van de Klein-Gordon operator is.

(h) Laat $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}$ en veronderstel dat $z^2 = \langle \zeta, \zeta \rangle + m^2 = \sum_{j=1}^n \zeta_j^2 + m^2$. Toon aan dat $|\operatorname{Im} z| \leq \|\operatorname{Im} \zeta\|$.

(i) Voor iedere $t \in \mathbb{R}$ definiëren we de functie $b_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ door
$$b_t(\xi) = \frac{\sin(t\|(\xi, m)\|)}{\|(\xi, m)\|}.$$
Toon aan dat er een unieke distributie $\beta_t \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ bestaat zo dat $\mathcal{F}(\beta_t) = b_t$. Toon verder aan dat $\operatorname{supp} \beta_t \subset \overline{B(0, |t|)}$.

(j) Toon aan dat voor elke $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ geldt dat
$$E(\varphi) = \int_0^\infty \beta_t(\varphi_t)\, dt.$$
Hierin is $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\varphi_t(\xi) = \varphi(t, \xi)$.

(k) Toon aan dat $\operatorname{supp} E$ bevat is in de gesloten kegel
$$\overline{C}_+ = \{(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid \ \|\xi\| \leq t\}.$$