Tentamen Functionaalanalyse

woensdag 6 november 2013, 13:30-16:30

Het gebruik van een schone hardcopy van het dictaat Functionaalanalyse van H. Hanssmann is toegestaan. Gebruik van ander materiaal zoals aantekeningen etc. is **niet** toegestaan.
Let wel: zet je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.

Succes!

1. Laat $C_b(\mathbb{R})$ de Banachruimte van begrensde continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voorzien van de supremumnorm en laat $C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid f(x) \to 0 \text{ als } x \to \pm\infty\}$. Beschouw voor vaste $g \in C_b(\mathbb{R})$ de lineaire operator $M_g : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ gegeven door $M_g f = gf$.

(a). Laat zien dat M_g begrensd is en bereken de operatornorm van M_g.

(b). Bepaal het spectrum van M_g.

2. Zij $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{C}$. Definieer

$$\mathcal{D} = \big\{x \in \ell_2(\mathbb{C}) \mid \sum_{k=0}^{\infty}(|\alpha_k x_{2k}|^2 + |\alpha_k x_{2k+1}|^2) < +\infty\big\}$$

en de operator $T : \mathcal{D} \subset \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ door

$$Tx = (\alpha_0 x_1, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_3, \alpha_1 x_2, \ldots).$$

(a). Bewijs dat T een dicht gedefinieerde gesloten lineaire operator op $\ell_2(\mathbb{C})$ is en dat $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{C}))$ dan en slechts dan als $\alpha \in \ell_\infty(\mathbb{C})$.

(b). Toon aan dat $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{C}))$ zelfgeadjungeerd is indien $\alpha \in \ell_\infty(\mathbb{R})$.

(c). Toon aan dat $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{C}))$ compact is indien $\alpha \in \ell_\infty(\mathbb{C})$ en $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = 0$.

Veronderstel nu dat $\alpha \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ gegeven is door $\alpha_0 = 0$ en $\alpha_j = 1/j$ voor $j \in \mathbb{N}$.

(d). Bepaal de spectrale representatie van T.

(e). Karakteriseer het beeld van $I - T$ door gebruik te maken van de spectrale representatie van T.

3. Laat $K : L_2([0,1], \mathbb{C}) \to L_2([0,1], \mathbb{C})$ gegeven zijn door

$$\big(K\phi\big)(t) = \int_0^1 ts(t+s)\phi(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

(a). Vind alle eigenwaarden en eigenvectoren van K.

Z.O.Z.

(b). Ga voor elke $\lambda \in \mathbb{C}$ na voor welke $f \in L_2([0,1],\mathbb{C})$ de integraalvergelijking

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 ts(t+s)\phi(s)\,ds = f(t), \quad 0 \le t \le 1$$

een oplossing $\phi \in L_2([0,1],\mathbb{C})$ heeft. Geef alle oplossingen.

4. Zij $S : \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ de rechter shift gegeven door $S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots) = (0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots)$. Laat $r, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en definieer $A : \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ door $A = S^r(S^*)^k$.

(a). Toon aan dat A een Fredholm operator is voor alle $r, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(b). Laat zien dat voor $\lambda \in \mathbb{C}$ met $|\lambda| > 1$, de operator $\lambda I - A$ inverteerbaar is en dat voor $|\lambda| < 1$, de operator $\lambda I - A$ Fredholm is met index $i(\lambda I - A) = k - r$.

(c). Bepaal het spectrum van A.

Laat $r \neq k$ en voor $a, b, c \in \mathbb{C}$, de operator $T : \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ gegeven worden door

$$T = aA^* + bI + cA.$$

Definieer de rationale functie τ door

$$\tau(\lambda) = a\lambda^{-1} + b + c\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0.$$

(d). Bewijs dat T Fredholm is dan en slechts dan als de functie $\tau(\lambda)$ geen nulpunten op de eenheidscirkel in $\mathbb{C}$ heeft.

(e). Neem aan dat T Fredholm is. Laat zien dat voor de index van T geldt

$$i(T) = (l-1)(k-r),$$

waarbij l het aantal nulpunten van τ in de open schijf $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ aangeeft.

EINDE

Notatie: Voor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\ell_2(\mathbb{K}) = \{x = (x_0, x_1, \ldots) \mid x_j \in \mathbb{K},\ j \geq 0,\ \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$$

$$\ell_\infty(\mathbb{K}) = \{x = (x_0, x_1, \ldots) \mid x_j \in \mathbb{K},\ j \geq 0,\ \sup_{j \geq 0} |x_j| < \infty\}$$

$$L_2([0,1],\mathbb{K}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid \int_0^1 |f(x)|^2\,dx < \infty\}$$

Normering:

1(a):8	2(a):8	3(a):6	4(a):7
1(b):7	2(b):6	3(b):9	4(b):8
	2(c):7		4(c):7
	2(d):7		4(d):7
	2(e):6		4(e):7