Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college WISB315 werd in 2004/2005 gegeven door Madalin Guta.

Functionaalanalyse (WISB315)
3 februari 2005

Opgave 1

Geef van volgende beweringen aan of ze juist of fout zijn.

a) Een eindig dimensionele lineaire deelruimte $V \subset B$ van een Banach ruimte B, is gesloten.

b) $C((0,1))$ is een deelruimte van $L^2((0,1))$. Pas op: $C((0,1)) \neq C([0,1])$!

c) $\int_0^1 |\frac{df}{dx}|dx$ is een norm op $C^1([0,1])$ (de ruimte van functies met continue afgeleide).

Opgave 2

Geef een voorbeeld van:

a) een rij $\{f_n\}_{n\geq 1}$ van functies op $[0,1]$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor alle $x \in [0,1]$ en $\|f_n\|_1 = 1$ voor alle $n \geq 1$.

b) een rij $\{g_n\}_{n\geq 1}$ van functies op $[0,1]$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_1 = 0$ en $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\infty = \infty$.

c) een rij $\{T_n\}_{n\geq 1}$ van begrensde operatoren op een Hilbert ruimte H zodanig dat $\lim_{n\to\infty} T_n\psi = 0$ voor alle $\psi \in H$, en $\|T_n - T_m\| \geq 1$ voor alle $n \neq m$.

d) een oneindige dimensionele deelruimte K van ℓ^2 zodanig dat $K^\perp$ ook oneindige dimensioneel is.
Noot van de TBC: deze opgave zat niet in het oorspronkelijke tentamen, maar stond in commentaar in het bestand dat we van de docent kregen

Opgave 3

Zij $f \in C^1([-\pi,\pi])$ een functie die voldoet aan $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Laat zien dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

waar f' staat voor de afgeleide van f. Laat vervolgens zien dat de gelijkheid geldt voor de functies $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ met $a, b \in \mathbb{R}$.
Hint: gebruik de trigonometrische orthonormale basis van $L^2([-\pi,\pi])$.

Opgave 4

Beschouw de ruimte van rijen

$$c_0 = \Big\{ \{a_n\}_{n\geq 1} \ : \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Big\}.$$

Defineer

$$\|\{a_n\}\|_\infty = \sup_n |a_n|.$$

a) Laat zien dat $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ een Banachruimte is.

b) Beschouw een rij $\{\lambda_n\} \in \ell_1$, d.w.z. $\sum_n |\lambda_n| < \infty$, en definieer de lineaire functionaal $f : c_0 \to \mathbb{R}$ door

$$f(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n.$$

Laat zien dat f begrensd is en bereken $||f||$.

Opgave 5

Zij $0 < \alpha < 1$ en defineer de ruimte $C_\alpha([a,b])$ van functies $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ waarvoor een constante $0 < k < \infty$ bestaat zodanig dat $|u(x) - u(y)| \leq k|x-y|^\alpha$, voor alle $x, y \in [a,b]$. Voor elke $u \in C_\alpha([a,b])$ defineer

$$\|u\| = \sup_{x\in[a,b]} |u(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

a) Laat zien dat $(C_\alpha([a,b]), \|\cdot\|)$ een genormeerde ruimte is.

b) Laat zien dat $(C_\alpha([a,b]), \|\cdot\|)$ een Banachruimte is.

c) Laat zien dat de verzameling $A = \{u \in C_\alpha([a,b]), \|u\| \leq 1\}$ equicontinu is.