Elementaire Getaltheorie (WISB321)

Tentamen, 5 november 2013, 8:30 -11:30 uur

OPGAVEN

1. (a) (1 pt) Los $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 161)$ op in $x \in \mathbb{Z}$. (Let op: 161 is geen priemgetal).

   (b) (1 pt) Stel N is een product van t verschillende oneven priemgetallen. Stel dat de vergelijking $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ N)$ een oplossing $x \in \mathbb{Z}$ heeft.
   Bewijs dat deze vergelijking 2^t restklassen modulo N als oplossingsverzameling heeft.

2. (a) (1 pt) Voor welke oneven priemgetallen p is 3 een kwadraatrest modulo p? (geef een afleiding met behulp van kwadratische wederkerigheid).
   Oplossing:

   Zij $p > 3$ een priemgetal zó dat $q = 4p + 1$ ook priem is.

   (b) (1/2 pt) Bewijs dat 3 geen kwadraatrest modulo q is.

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat 3 een primitieve wortel modulo q is.

3. Beschouw de vergelijking $x^2 + y^2 = z^3$ in $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

   (a) (1 pt) Laat zien dat er oneindig veel oplossingen zijn met $x, y, z > 0$.

   (b) (1 pt) Laat zien dat er oneindig veel oplossingen zijn met $x, y, z > 0$ en $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$.

4. (a) (1 pt) Bepaal de kettingbreuk van $\sqrt{19}$.

   (b) (1/2 pt) Bepaal een niet-triviale oplossing (dwz $y > 0$) van $x^2 - 19y^2 = 1$ in $x, y \in \mathbb{N}$.

   (c) (1/2 pt) Bepaal $\alpha \in \mathbb{R}$ zó dat α de zuiver periodieke kettingbreuk $[\overline{1, 2, 1}]$ heeft.

5. Een machtrijk getal is een natuurlijk getal $n > 1$ zó dat alle priemfactoren van n tot de macht 3 of hoger in de ontbinding voorkomen.

   Laat zien dat het abc-vermoeden het bestaan van een constante $c > 0$ impliceert zó dat voor elk opeenvolgend tweetal machtrijke getallen $x > y$ geldt:

   $$x - y > cx^{1/6}.$$

   Geef eerst de afleiding voor die gevallen waarin $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$ (3/2 pt), bewijs daarna de ongelijkheid in het algemeen (1/2 pt).