Elementaire Getaltheorie (WISB321)

Tentamen, 4 november 2015, 9:00 -12:00 uur

Bij dit tentamen is gebruik van boeken, dictaat of aantekeningen niet toegestaan. Als rekenhulp kun je een eenvoudige calculator gebruiken (dus geen GR of smartphone). Als je een onderdeel mist mag je wel het resultaat ervan in de volgende onderdelen gebruiken.
Motiveer je antwoorden!
Veel succes!

1. We beschouwen de vergelijking $x^7 \equiv x (\text{mod } 312)$ in $\mathbb{Z}/312\mathbb{Z}$.
   (a) (1/2 pt) Bepaal $\phi(312)$.
   (b) (1/2 pt) Geef een oplossing x met $x \not\equiv 0, 1 (\text{mod } 312)$.
   (c) (1 pt) Hoeveel restklassen heeft de vergelijking als oplossing?

2. Zij $x \in \mathbb{N}$ oneven en p een priemdeler van $x^2 + 4$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat $p \equiv 1 (\text{mod } 4)$.
   (b) (1/2 pt) Stel bovendien dat x niet deelbaar is door 3. Bewijs dat $x^2 + 4$ deelbaar is door een priemgetal p van de vorm $3k - 1$.
   (c) (1 pt) Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan van de vorm $12k + 5$.

3. (a) (1 pt) Bewijs dat er oneindig veel paren opeenvolgende kwadraten zijn waarvan de som weer een kwadraat is (hint: maak van de vergelijking $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ een Pell-vergelijking).
   (b) (1 pt) Bewijs dat er geen drie opeenvolgende kwadraten zijn waarvan de som weer een kwadraat is.

4. (2 pt) Met $P(n)$ geven we de grootste priemdeler aan van een getal $n \geq 2$. Zij $F(x) = x(x - u)$ met $u \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de correctheid van het abc-vermoeden impliceert dat $P(F(n)) \to \infty$ als $n \to \infty$.

5. (1 pt) Bewijs dat bij elke $\epsilon > 0$ een $n_0(\epsilon)$ bestaat zó dat

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ priem}}} p < e^{(1+\epsilon)n} \quad \text{voor alle } n > n_0(\epsilon).$$

   Je mag hierbij de priemgetalstelling gebruiken.

6. (1 pt) Zij $h(n)$ het aantal priemgetallen $\leq n$ van de vorm $4k + 1$. Bewijs dat

$$h(n) \leq \frac{2}{15} n + 2 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$