Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB321 werd in 2006/2007 gegeven door Dhr. F. Beukers.

Elementaire getaltheorie (WISB321)
2 februari 2007

Tijdens dit tentamen mogen boek en aantekeningen niet gebruikt worden. Alleen een eenvoudige calculator is toegestaan. Geef een goede onderbouwing van je antwoorden. Success!

Opgave 1 *(2 punten)*

Beschouw de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y + z)^3$ in $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) Laat zien dat voor elke oplossing de waarden van x, y, z even zijn.

b) Laat zien dat $x = y = z = 0$ de enige oplossing is.

Opgave 2 *(2 punten)*

Beschouw de vergelijking $x^3 + y^3 = z^4$ in $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

a) Laat zien dat, onder aanname van het *abc*-vermoeden, de vergelijking hooguit eindig veel oplossingen heeft met $\text{ggd}(x, y, z) = 1$.

b) Laat zien dat er oneindig veel oplossingen zijn als we de conditie $\text{ggd}(x, y, z) = 1$ laten vervallen.

Opgave 3 *(2 punten)*

Beschouw de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ in $x, y, z \in \mathbb{Z}$ met $x, y, z > 1$.

a) Geef tenminste twee oplossingen.

b) Laat zien dat er oneindig veel oplossingen zijn.

c) Geef een expliciete formule die een oneindige deelverzameling van oplossingen geeft.

Opgave 4 *(2 punten)*

Laat zien dat de oneindige som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

een irrationele waarde heeft.

Opgave 5 *(2 punten)*

In het diktaat is bewezen dat

$$\prod_{p \text{ priem}, p \leq n} p < 4^n$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. Gebruik dit resultaat om te bewijzen dat er een constante $C > 0$ bestaat zó dat $\text{kgb}(1, 2, \ldots, n) < C^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.