Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.

25 januari 2016, 08.30-11.30

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten): je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat T de "theorie van discrete lineaire ordeningen zonder eindpunten" zijn; d.w.z., in de taal $L = \{<\}$ heeft T de volgende axioma's:

$$\forall x \neg(x < x) \qquad \forall xyz((x < y \wedge y < z) \to x < z)$$
$$\forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x) \qquad \forall x \exists yz(y < x \wedge x < z)$$
$$\forall x \exists y \forall z(x < z \leftrightarrow (y < z \vee y = z))$$

a) (5) Geef twee modellen M en N van T, zodat M een substructuur is van N, maar geen elementaire substructuur.

b) (5) Beredeneer dat T geen kwantoreliminatie heeft.

Opgave 2. Laat L de taal $\{R\}$ zijn, voor een 2-plaatsig relatiesymbool R, en T de L-theorie waarvan de modellen precies die structuren (M, R^M) zijn waarvoor geldt: R^M is een equivalentierelatie op M met oneindig veel equivalentieklassen, en elke equivalentieklasse is oneindig.

a) (5) Geef een stelsel axioma's voor T

b) (5) Bewijs dat T ω-kategorisch is.

Opgave 3. Bewijs door middel van natuurlijke deductie (bewijsbomen):

a) (3) $\psi \to (\phi \vee \chi) \vdash (\psi \to \phi) \vee (\psi \to \chi)$

b) (4) $\forall x(\exists y R(x,y) \to \phi(x)) \vdash \forall xy(R(x,y) \to \phi(x))$ (hier komt de variabele y niet in $\phi(x)$ voor)

c) (3) $\psi \to (\phi \wedge \chi) \vdash (\psi \to \phi) \wedge (\psi \to \chi)$

Opgave 4. Laat L de taal $\{R, f\}$ zijn, waar R een 2-plaatsig relatiesymbool is en f een 1-plaatsig functiesymbool. We definiëren de L-theorie T door de volgende axioma's:

(1) de axioma's die zeggen dat R een equivalentierelatie is

(2) $\forall x R(x, f(x))$

(3) $\forall xy(R(x, y) \to f(x) = f(y))$

a) (5) Laat T_R de theorie in de taal $\{R\}$ zijn, met alleen de axioma's van (1). Is T conservatief over T_R? Beredeneer je antwoord.

b) (5) Laat T_f de theorie in de taal $\{f\}$ zijn, zonder axioma's. Is T conservatief over T_f? Beredeneer je antwoord.

Opgave 5. Ik herinner eraan dat de *cumulatieve hiërarchie* van verzamelingen $(V_\alpha)_{\alpha \text{ een ordinaalgetal}}$ als volgt gedefinieerd is:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \textstyle\bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \text{ voor een limiet-ordinaalgetal } \lambda \end{aligned}$$

Voor een verzameling x is de *rang* van x, $\mathrm{rk}(x)$, gedefinieerd als het kleinste ordinaalgetal α waarvoor $x \subseteq V_\alpha$.

a) (5) Stel dat $\mathrm{rk}(x)$ een oneindig limiet-ordinaalgetal is. Bewijs dat x oneindig is.

b) (5) Stel dat $\mathrm{rk}(x) = \omega_1$, het kleinste overaftelbare ordinaalgetal. Bewijs dat x overaftelbaar is.