Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

10 december 2013, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Gegeven zijn de volgende verzamelingen. Bepaal van elke verzameling of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is; motiveer je antwoord.

a) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{voor alle } x \in \mathbb{N} \text{ is } f(x+1) \leq f(x)\}$

b) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \geq 2\} \text{ is eindig}\}$

c) (4) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{ er is } N > 0 \text{ zodat voor alle } x \in \mathbb{N}\text{: } x \in A \Leftrightarrow x + N \in A\}$

Opgave 2. Bewijs dat er een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschappen:

i) voor elke niet-lege eindige deelverzameling $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ geldt

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \notin \mathbb{Q}$$

ii) voor elke $x \in \mathbb{R} - A$ geldt: hetzij $x^2 \in \mathbb{Q}$, hetzij er is een eindige, niet-lege deelverzameling $\{a_1, \ldots, a_n\}$ van A zodat

$$x^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 \in \mathbb{Q}$$

Voor de duidelijkheid: de notatie $\{a_1, \ldots, a_n\}$ veronderstelt dat alle a_i verschillend zijn *(Hint: gebruik het Lemma van Zorn).*

Opgave 3. In deze opgave gaan we uit van het feit dat er een welordening L bestaat die overaftelbaar is, terwijl voor elke $l \in L$ het beginsegment $L_l = \{x \in L \,|\, x < l\}$ aftelbaar is. Zo'n welordening L noemen we *van type* ω_1.

a) (5) Stel L is van type ω_1. Laat zien, dat elke aftelbare deelverzameling van L een bovengrens heeft in L.

b) (5) Stel, dat L_1 en L_2 beide welordeningen van type ω_1 zijn. Bewijs dat er een inbedding bestaat van L_1 in L_2. Concludeer, dat L_1 en L_2 isomorf zijn.

Opgave 4. In deze opgave nemen we de taal $L = \{\leq, \perp\}$ waar $\leq$ en $\perp$ twee 2-plaatsige relatiesymbolen zijn. We beschouwen ook de L-structuur $\mathbb{N}$ waarin $\leq$ de gewone ordening is en $x \perp y$ betekent: $\mathrm{ggd}(x, y) = 1$.

a) (3) Geef een L-formule $\phi_1(x)$ in één vrije variabele x, die in $\mathbb{N}$ het getal 1 definieert, d.w.z. voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\mathbb{N} \models \phi_1(n) \Leftrightarrow n = 1$

b) (4) Geef een L-formule $\phi_{\mathrm{pr}}(x)$ in één vrije variabele x, die in $\mathbb{N}$ de priemgetallen definieert ($\mathbb{N} \models \phi_{\mathrm{pr}}(n) \Leftrightarrow n$ is een priemgetal)

c) (3) Geef een L-formule ϕ_{prm} die in $\mathbb{N}$ de machten van priemgetallen definieert.

Opgave 5. Laat $(X, \leq)$ een poset zijn. In deze opgave bewijzen we met behulp van de Compactheidsstelling, dat er een lineaire ordening $(L, \leq)$ is en een injectieve, ordebewarende functie van X naar L.

a) (3) Bewijs dit eerst, voor het geval dat X eindig is.

b) (4) Beschouw in een taal L met 2-plaatsig relatiesymbool $\leq$ en constanten $\{c_x \,|\, x \in X\}$ de theorie bestaande uit de volgende L-zinnen:

   i) De axioma's voor een lineaire ordening

   ii) De zinnen $\neg(c_x = c_y)$ voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$

   iii) De zinnen $c_x \leq c_y$ voor alle $x, y \in X$ met $x \leq y$

   Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat deze theorie consistent is.

c) (3) Leid uit b) het gewenste resultaat af.