Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 13 maart 2014, 13.30-16.30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Bepaal van elk van de onderstaande verzamelingen of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord.

a) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid \forall nm \in \mathbb{N}(n \leq m \Rightarrow f(n) \geq f(m))\}$

b) (4) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid$ voor elke keten $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{N}$ geldt: als $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ dan is er een i met $A \subseteq B_i\}$

c) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}(f(n+1) \leq f(n)+1)\}$

Opgave 2.

a) (4) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling G van $\mathbb{R}$ is die maximaal is met betrekking tot de eigenschappen:

   i) G is een deelgroep van $\mathbb{R}$ (d.w.z., $0 \in G$ en voor alle $x, y \in G$ is $x - y \in G$)

   ii) $G \cap \mathbb{Q} = \{0\}$

b) (4) Zij G als in deeltje a). Bewijs: als $g \in G$ en $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dan is $\frac{g}{n} \in G$

c) (2) Zij G als in deeltje a). Bewijs: elk reëel getal r is op precies één manier te schrijven als $r = g + q$, met $g \in G$ en $q \in \mathbb{Q}$.

Opgave 3. In deze opgave zijn steeds gegeven: een taal L en twee L-structuren M en N zodat M een deelverzameling is van N. Bepaal in elk van de gevallen, of M een substructuur is van N, en zo ja, of M een elementaire substructuur is van N.

a) (4) $L = \emptyset$, $M \subset N$, $M \neq N$, M is eindig;

b) (3) $L = L_{\text{rings}}$, $N = \mathbb{C}$, M is de verzameling van die complexe getallen die algebraïsch zijn over $\mathbb{Q}$;

c) (3) $L = \{\leq\}$, $N = \mathbb{N}$ met de gebruikelijke ordening, $M = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ is een deler van } 60\}$, met $x \leq^M y$ als x een deler is van y.

Opgave 4. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\phi, \psi \to \chi \vdash \neg\psi \vee (\phi \wedge \chi)$

b) (4) $\forall y \exists x (f(x) = y), \forall z \exists y (g(y) = z) \vdash \forall u \exists v (g(f(v)) = u)$

c) (3) $\forall x (R(x,y) \to S(y)) \vdash \exists x R(x,y) \to S(y)$

Opgave 5. In deze opgave definiëren we voor ordinaalgetallen de optelling en de vermenigvuldiging als volgt:

$$\begin{array}{ll} \alpha + 0 = \alpha & \alpha{\cdot}0 = 0 \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 & \alpha{\cdot}(\beta + 1) = (\alpha{\cdot}\beta) + \alpha \\ \alpha + \gamma = \bigcup\{\alpha + \beta \,|\, \beta \in \gamma\} & \alpha{\cdot}\gamma = \bigcup\{\alpha{\cdot}\beta \,|\, \beta \in \gamma\} \end{array}$$

Hierbij is in de laatste regel aangenomen dat γ een niet-leeg limietordinaalgetal is.

a) (3) Bewijs dat voor alle α en β, $\alpha \leq \alpha + \beta$

b) (4) Laat zien dat er voor elke α een β is met $\alpha + \beta = \beta$
[Hint: kijk naar de rij $\alpha, \alpha + \alpha, \alpha + \alpha + \alpha, \ldots$]

c) (3) Gegeven α, bewijs dat de kleinste β die aan b) voldoet, gelijk is aan $\alpha{\cdot}\omega$.