Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B met uitwerkingen

19 januari 2012, 13.30-16.30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat $\mathcal{L} = \{R\}$, waar R een 2-plaatsig relatiesymbool is.

a) (2) Geef een $\mathcal{L}$-theorie T die uitdrukt dat R een equivalentierelatie is met precies 3 equivalentieklassen, die alledrie oneindig zijn.

b) (3) Zij T de theorie uit a). Bewijs, dat T ω-categorisch is.

c) (3) Bewijs dat de theorie T uit a) volledig is.

d) (2) Beschouw nu dezelfde theorie T, maar in de taal $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{a, b, c\}$ waar a, b, c constanten zijn. Hoeveel niet-isomorfe aftelbare modellen heeft T nu?

Uitwerking: a) T bestaat uit de zinnen $\forall x R(x, x)$, $\forall xy(R(x, y) \to R(y, x))$, $\forall xyz(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$ (R is een equivalentierelatie), $\exists xyz(\neg R(x, y) \wedge \neg R(x, z) \wedge \neg R(y, z) \wedge \forall w(R(x, w) \vee R(y, w) \vee R(z, w)))$ (R heeft precies 3 equivalentieklassen) alsmede de zinnen ϕ_n, $n \geq 1$, waar

$$\phi_n \equiv \forall x_1 \cdots x_n(R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_1, x_n) \to \exists y(R(x_1, y) \wedge \neg(x_1 = y) \wedge \cdots \wedge \neg(x_n = y)))$$

(ϕ_n drukt uit dat elke klasse minstens n elementen heeft)
b) Een isomorfisme van modellen moet de equivalentierelatie behouden. Als M en N twee aftelbare modellen zijn, dan is M de vereniging van 3 aftelbaar oneindige klassen M_1, M_2, M_3 en evenzo is N de vereniging van klassen

N_1, N_2, N_3. Neem bijecties $M_1 \to N_1, \ldots, M_3 \to N_3$; die stellen samen tot een isomorfisme van M naar N.
c) Dit is een standaard toepassing van de Łos-Vaught test uit het dictaat: de taal is aftelbaar, de theorie heeft alleen oneindige modellen en is ω-categorisch.
d) Als nu M en N modellen van T zijn, beschouwen we isomorfismen van L'-structuren. Voor zo'n isomorfisme $f : M \to N$ moet $f(a^M) = a^N, f(b^M) = b^N$ en $f(c^M) = c^N$ gelden en tevens moet f de equivalentierelatie behouden. Dat betekent dat dezelfde equivalenties tussen de a, b, c moeten gelden in M als in N. Er zijn 5 mogelijkheden: a, b, c niet-equivalent; a, b equivalent, niet-equivalent met c; a, b, c equivalent; b, c equivalent, niet equivalent met a; en a, c equivalent, niet equivalent met b.

Opgave 2. Stel T is een theorie met de volgende eigenschappen:

i) T heeft kwantoreliminatie.

ii) Voor elk tweetal modellen M_0, M_1 van T is er een model N van T zodat M_0 en M_1 beide isomorf zijn met een substructuur van N.

Bewijs, dat T volledig is.

Uitwerking: Stel ϕ is een zin in de taal van T zodat $T \not\models \phi$ en $T \not\models \neg\phi$. Dan is er een model M_0 van $T \cup \{\neg\phi\}$ en een model M_1 van $T \cup \{\phi\}$. Per aanname i) is er een kwantorvrije zin χ zodat $T \models \phi \leftrightarrow \chi$. Omdat M_0 en M_1 modellen van T zijn volgt dan $M_0 \models \neg\chi$ en $M_1 \models \chi$. Maar volgens aanname ii) is er een model N van T zodat M_0, M_1 beide isomorf zijn met een substructuur van N. Dat betekent dat in M_0 dezelfde kwantorvrije zinnen waar zijn als in N; en hetzelfde geldt voor M_1. Dit is duidelijk onmogelijk, want zowel χ als $\neg\chi$ zijn kwantorvrije zinnen.

Opgave 3. Laat met bewijsbomen zien:

a) (3) $\{(\phi \to \psi) \to \chi\} \vdash \phi \vee \chi$

b) (4) $\vdash R(f(x)) \to \forall y(\neg(y = f(x)) \vee R(y))$

c) (3) $\{\forall x(\phi(x) \to \exists y \psi(x, y))\} \vdash \forall x(\forall y \neg\psi(x, y) \to \neg\phi(x))$

Uitwerking:
a)

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\phi\vee\chi)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{(\phi\to\psi)\to\chi^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\phi\vee\chi)^1 \qquad \dfrac{\phi^2}{\phi\vee\chi}\,\vee I}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot E}{\phi\to\psi}\,\to I,2}{\chi}\,\to E}{\phi\vee\chi}\,\vee I}{\bot}\,\neg E}{\phi\vee\chi}\,\bot E,1$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\neg E\;\dfrac{\dfrac{R(f(x))^3 \qquad \dfrac{\dfrac{X^1 \qquad \vee I\,\dfrac{\neg(u=f(x))^2}{\neg(u=f(x))\vee R(u)}}{\bot}\,\neg E}{u=f(x)}\,\bot E,2}{R(u)}\,\text{Subst}}{\neg(u=f(x))\vee R(u)}\,\vee I \qquad X^1}{\bot}\,\neg E}{\dfrac{\neg(u=f(x))\vee R(u)}{\forall y(\neg(y=f(x))\vee R(y))}\,\forall I}\,\bot E,1$$

Hier is X de formule $\neg(\neg(u=f(x))\vee R(u))$.

c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\phi(x)\to\exists y\psi(x,y))^1}{\phi(u)\to\exists y\psi(u,y)}\,\forall E \qquad \phi(u)^2}{\exists y\psi(u,y)}\,\to E \qquad \dfrac{\psi(u,v)^3 \qquad \dfrac{\forall y\neg\psi(u,y)^4}{\neg\psi(u,v)}\,\forall E}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,\exists E,3}{\neg\phi(u)}\,\neg I,2}{\forall y\neg\psi(u,y)\to\neg\phi(u)}\,\to I,4}{\forall x(\forall y\neg\psi(x,y)\to\neg\phi(x))}\,\forall I$$

Opgave 4. Herinner, dat een $\mathcal{L}$-theorie T *genoeg constanten* heeft als er voor elke $\mathcal{L}$-formule $\phi(x)$ met één vrije variabele x, er een constante c in $\mathcal{L}$ is zodat $T \models (\exists x\phi(x)) \to \phi(c)$.

a) (5) Laat $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \cdots$ een keten van talen zijn en $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots$ een keten van theorieën, zodat elke T_i een $\mathcal{L}_i$-theorie is. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

   i) $T_\infty = \bigcup_i T_i$ heeft genoeg constanten.

   ii) Voor elke i en elke $\mathcal{L}_i$-formule $\phi(x)$ met één vrije variabele x, is er een $j > i$ en een constante c in $\mathcal{L}_j$, zodat $T_j \models (\exists x \phi(x)) \to \phi(c)$.

b) (5) Laat T een $\mathcal{L}$-theorie zijn die genoeg constanten heeft. Bewijs dat er voor elke $\mathcal{L}$-zin ϕ een kwantorvrije $\mathcal{L}$-zin ψ is zodat $T \models \phi \leftrightarrow \psi$. Betekent dit dat T kwantoreliminatie heeft? Voor deze laatste vraag hoef je je antwoord niet te bewijzen.

Uitwerking: a) i)$\Rightarrow$ii): stel $\phi(x)$ een L_i-formule in één vrije variabele. Dan is er een constante c in L_∞ zodat $T_\infty \models (\exists x \phi(x)) \to \phi(c)$. Zij k minimaal zodat c in L_k zit. Uit de Compactheidsstelling volgt dat er een $j > k$ is zodat $T_j \models (\exists x \phi(x)) \to \phi(c)$.

ii)$\Rightarrow$i): Stel $\phi(x)$ is een L_∞-formule in één vrije variabele. Laat i zo zijn dat $\phi(x)$ een L_i-formule is. Volgens ii) is er een $j > i$ en een constante c in $\mathcal{L}_j$, zodat $T_j \models (\exists x \phi(x)) \to \phi(c)$. Maar dan geldt ook $T_\infty \models (\exists x \phi(x)) \to \phi(c)$. Dus T_∞ heeft genoeg constanten.

b) Het handigste is hier om de zin ϕ in prenex-normaalvorm te brengen en inductie te voeren naar het aantal kwantoren. Noem dit n. Als $n = 0$ is er niets te bewijzen; dan is ϕ kwantorvrij. Stel ϕ begint met $n + 1$ kwantoren. Als $\phi \equiv \exists x \psi$, dan is er (omdat T genoeg constanten heeft) een constante c zodat $T \models \phi \leftrightarrow \psi(c)$. Voor $\psi(c)$ geldt de inductiehypothese, dus ϕ is, in T, equivalent met een kwantorvrije zin. Als $\phi \equiv \forall x \psi$, neem een constante c' zodat $T \models \exists x \neg\psi \to \neg\psi(c')$. Er volgt dat $T \models \phi \leftrightarrow \neg\exists x \neg\psi \leftrightarrow \neg\neg\psi(c') \leftrightarrow \psi(c')$, en weer geldt voor $\psi(c')$ de inductiehypothese.
Dit betekent *niet* dat T kwantoreliminatie heeft: daarvoor moeten we elke *formule* equivalent hebben aan een kwantorvrije formule (in dezelfde vrije variabelen). Voor een concreet tegenvoorbeeld: laat L de taal van ringen zijn met een constante voor elk element van $\mathbb{R}$, en laat T de verzameling van die L-zinnen zijn, die waar zijn in $\mathbb{R}$. Deze theorie heeft duidelijk genoeg constanten. Maar als hij kwantoreliminatie had, zou de formule $\exists y (y^2 = x)$, die de niet-negatieve reële getallen definieert, equivalent moeten zijn aan een kwantorvrije formule in de variabele x. Maar het is niet moeilijk om in te zien, dat elke deelverzameling van $\mathbb{R}$ die gedefinieerd wordt door een kwantorvrije L-formule, òf eindig, òf coeindig is.

Opgave 5. Herinner, dat het *regulariteitsaxioma* in de verzamelingenleer zegt:

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y \epsilon x(y \cap x = \emptyset))$$

a) (5) Laat zien dat uit het regulariteitsaxioma volgt dat er geen oneindige rij $x_0, x_1, \ldots$ kan bestaan, zodat $\cdots \epsilon x_2 \epsilon x_1 \epsilon x_0$.

b) (5) Beredeneer dat het volgende inductieprincipe geldig is: als voor alle x geldt $\forall y \epsilon x \phi(y) \to \phi(x)$, dan geldt $\forall x \phi(x)$.

Uitwerking: a) Stel zo'n rij bestond wel. Laat X de verzameling $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ zijn. Dan voldoet X niet aan het regulariteitsaxioma: neem een element van X, zeg x_n. Nu is $x_{n+1} \epsilon (x_n \cap X)$, dus $x_n \cap X \neq \emptyset$.
b) Stel voor alle x geldt $\forall y \epsilon x \phi(y) \to \phi(x)$. Stel $\forall x \phi(x)$ geldt niet; dan is er een x, zeg x_0, zodat $\neg\phi(x_0)$. Uit de aanname volgt nu dat er een element van x_0 is, zeg x_1, zodat $\neg\phi(x_1)$. Weer de aanname gebruikend zien we dat er een $x_2 \epsilon x_1$ is met $\neg\phi(x_2)$... We krijgen een oneindige rij $\cdots \epsilon x_2 \epsilon x_1 \epsilon x_0$; in tegenspraak met a).