Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

8 maart 2017, 09:30–12:30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Geef voor elke van onderstaande verzamelingen aan, of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \text{ is } f(n) = f(n+1) + f(n+2)\}$

b) (4) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \text{ is } f(n)^2 - 3f(n) + 2 = 0\}$

c) (3) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \text{ is } f(n) \geq f(n+1)\}$

Opgave 2. Met $[0, 2)$ geven we, zoals gebruikelijk, het half-open interval $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$ aan.
In deze opgave beschouwen we de groep $[0, 2)$ met optelling "modulo 2", d.w.z. voor $x, y \in [0, 2)$ zetten we:

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y & \text{als } x + y < 2 \\ x + y - 2 & \text{als } x + y \geq 2 \end{cases}$$

a) (5) Bewijs met behulp van het lemma van Zorn dat er een deelgroep G van $[0, 2)$ is die maximaal is m.b.t. de eigenschap, dat $1 \notin G$.

b) (5) Laat G als in deeltje a). Laat zien dat voor elke $x \in [0, 2)$ geldt: als $x \notin G$, dan is er een *even* getal n zodat

$$\underbrace{x \oplus \cdots \oplus x}_{n \text{ keer}} \in G$$

Opgave 3. Beschouw de poset $(P, \leq)$ van alle oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$: de ordening op P is inclusie als deelverzameling.
Laat $(W, \leq)$ een welordening zijn en $f : P \to W$ een ordebewarende functie (dus: als $A \subseteq B$ dan $f(A) \leq f(B)$).
Bewijs, dat f niet injectief kan zijn.

Opgave 4. Laat L de taal zijn met één 2-plaatsig functiesymbool f. Geef voor elk van de onderstaande L-structuren een L-zin, die waar is in die structuur maar onwaar in de andere drie structuren. Een beetje uitleg wordt op prijs gesteld.

a) (2) $\mathbb{R} - \{0\}$ met de gewone vermenigvuldiging.

b) (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ met de gewone vermenigvuldiging.

c) (2) $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| > 1\}$ met de gewone vermenigvuldiging.

d) (3) De verzameling 2×2-matrices met reële coëfficiënten, waarvan de determinant absolute waarde > 1 heeft, met matrixvermenigvuldiging.

Opgave 5. Laat $(P, \leq)$ een poset zijn. Noem elementen $x, x' \in P$ *verbonden* als er een $n \geq 2$ is en er rijtjes $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$ van elementen van P bestaan zodat $x = x_1$, $x' = x_n$, en voor alle i met $1 \leq i < n$ geldt: $x_i \leq y_i$ en $x_{i+1} \leq y_i$.

a) (4) Laat zien dat "verbondenheid" een equivalentierelatie op P is.

b) (6) Noem P *hecht* als elk tweetal elementen van P verbonden is. Bewijs, dat er geen theorie in de taal $L_{\text{pos}} = \{\leq\}$ van posets is, waarvan de modellen precies de hechte posets zijn. Hint: gebruik de Compactheidsstelling.