Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.

12 april 2017, 09:00-12:00

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. De theorie T_d van "dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten", geformuleerd in de taal $L_d = \{<\}$, is ω-kategorisch en heeft kwantoreliminatie. Dit mag zonder bewijs worden gebruikt.

In deze opgave beschouwen we een uitbreiding van de taal T_d en een uitbreiding van de theorie T_d: laat $L_{d,R} = L_d \cup \{R\}$, waar R een nieuw 1-plaatsig relatiesymbool is; de theorie $T_{d,R}$ heeft, behalve de axioma's van T_d, de volgende axioma's:

$$\begin{gathered}\forall x \forall y \forall z((R(x) \wedge R(y) \wedge x < z \wedge z < y) \to R(z)) \\ \forall x(R(x) \to \exists y(x < y \wedge R(y))) \\ \forall x(R(x) \to \exists y(y < x \wedge R(y))) \\ \forall x(R(x) \to \exists y(x < y \wedge \neg R(y))) \\ \forall x(R(x) \to \exists y(y < x \wedge \neg R(y)))\end{gathered}$$

a) (4) Laten M_1 en M_2 de volgende modellen van $T_{d,R}$ zijn: voor beide is de onderliggende verzameling $\mathbb{Q}$, met de gebruikelijke ordening, en

$$\begin{aligned}R^{M_1} &= \{q \in \mathbb{Q} \mid -1 < q < 1\} \\ R^{M_2} &= \{q \in \mathbb{Q} \mid -\pi < q < \pi\}\end{aligned}$$

Geef een $L_{d,R}$-zin die waar is in M_1 maar onwaar in M_2.

b) (3) Heeft $T_{d,R}$ kwantoreliminatie? Motiveer je antwoord.

c) (3) Hoeveel niet-isomorfe aftelbare modellen heeft $T_{d,R}$?

Opgave 2. Zij L de taal $\{<\}$. Hieronder staat drie keer een L-structuur M en een substructuur N van M (alle drie met gebruikelijke ordening):

$$\begin{array}{rll} \text{i)} & M = \mathbb{R} & N = \mathbb{Q} \\ \text{ii)} & M = \mathbb{Z} & N = 2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ \text{iii)} & M = \mathbb{R} & N = (0,1) \cup (1,2) \end{array}$$

a) (3) Bewijs dat in elk van de drie gevallen, M en N dezelfde L-zinnen waar maken.

b) (3) Bepaal in welke van de drie gevallen, M en N isomorf zijn als L-structuren.

c) (4) Bepaal in welke van de drie gevallen, N een elementaire substructuur is van M.

Opgave 3. Laat met bewijsbomen zien:

a) (4) $\phi \wedge \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \wedge \psi)$ (x komt niet in ϕ voor)

b) (3) $\phi \to \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \to \psi)$ (x komt niet in ϕ voor)

c) (3) $\exists y(y = f(x) \wedge R(y)) \vdash R(f(x))$

Opgave 4. Ik herinner eraan dat als T een L-theorie is, $L \subset L'$, en T' een L'-theorie is met $T \subset T'$, we T' *conservatief over* T noemen, als voor elke L-zin ϕ geldt: als $T' \vdash \phi$, dan $T \vdash \phi$.

In deze opgave beschouwen we $L = \{f, \leq\}$ waar f een 1-plaatsig functiesymbool is en $\leq$ een 2-plaatsig relatiesymbool. Zij $\mathrm{Pos}(\leq)$ de $\{\leq\}$-zin die uitdrukt: "$\leq$ is een partiële ordening met kleinste element". Verder beschouwen we de L-zinnen:

$$\begin{array}{rcl} \phi & \equiv & \exists x \forall y(f(y) = y \leftrightarrow y = x) \\ \psi & \equiv & \forall x(f(x) \leq x) \end{array}$$

Laat T_f de $\{f\}$-theorie zijn met alleen axioma ϕ; laat $T_\leq$ de $\{\leq\}$-theorie zijn met alleen axioma $\mathrm{Pos}(\leq)$; en zij T de L-theorie met axioma's $\mathrm{Pos}(\leq)$, ϕ en ψ.

Bewijs dat T conservatief is over $T_\leq$, maar niet over T_f.

Opgave 5. Herinner je, dat ω de *kleinste* verzameling α is waarvoor geldt: $\emptyset \in \alpha$, en $\forall x \in \alpha((x \cup \{x\}) \in \alpha)$.

a) (5) Bewijs, dat ω *transitief* is, d.w.z. $\forall x \in \omega(x \subset \omega)$

b) (5) Bewijs, dat ω een ordinaalgetal is.