Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

15 december 2017, 13:30–16:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Geef voor elke van onderstaande verzamelingen aan, of hij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ is eindig of } \mathbb{N} - A \text{ is eindig}\}$

b) (4) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ geldt } |A \cap \{0, \dots, n\}| = n\}$

c) (3) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor maar eindig veel } B \subseteq \mathbb{N} \text{ geldt } A \cup B = \mathbb{N}\}$

Opgave 2. Bewijs dat er geen verzameling X bestaat zodat er een bijectie is tussen $\mathcal{P}(X)$ en $\mathbb{N}$ ($\mathcal{P}(X)$ is de machtsverzameling van X).

Opgave 3. Laat $(P, \leq)$ een poset zijn. Een deelverzameling A van P heet een *bos* als voor alle $x, y, z \in A$ geldt: als $x \leq z$ en $y \leq z$, dan $x \leq y$ of $y \leq x$.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat P een maximaal bos heeft (maximaal m.b.t. $\subseteq$).

b) (2) Stel $A \subseteq P$ is een maximaal bos als in a), en stel dat $p \in P$ een ondergrens is voor A (d.w.z., $p \leq a$ voor alle $a \in A$). Laat zien dat $p \in A$.

c) (3) Stel A als in b), en stel $p \in P - A$. Laat zien: er is een $x \in A$ met $p \leq x$, of er is een $x \in A$ met $x \leq p$.

Opgave 4. Laat L een lineaire ordening zijn met kleinste element 0_L. Veronderstel dat voor elke $x \in L$ er een kleinste element $x + 1$ van L is, zodat $x < x + 1$.

Bewijs of weerleg (door een tegenvoorbeeld) dat L een welordening is.

Opgave 5. We beschouwen de taal L die twee functiesymbolen heeft: m en ξ, met m 2-plaatsig en ξ 1-plaatsig. Zij M de L-structuur met onderliggende verzameling $\mathbb{R}$ en de volgende interpretatie van de functiesymbolen: $m^M(x, y) = xy$ (vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$) en $\xi^M(x) = e^x$.

a) (3) Geef een L-formule $\phi_0(x)$ met één vrije variabele x die in M het getal 0 definieert, d.w.z. voor een reëel getal r geldt: $M \models \phi_0(r)$ precies wanneer $r = 0$.

b) (3) Geef een L-formule $\phi_+(x, y, z)$ zodat voor elk drietal reële getallen a, b, c geldt: $M \models \phi_+(a, b, c)$ precies wanneer $a + b = c$.

c) (4) Geef een L-formule $\phi_<(x, y)$ zodat voor elk paar reële getallen a, b geldt: $M \models \phi_<(a, b)$ precies als $a < b$.