Herkansingstentamen Grondslagen van de Wiskunde, 18 april 2018, 09.00-12.00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1.

a) (5) Zij $\mathcal{A}$ een deelverzameling van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (de machtsverzameling van $\mathbb{N}$) zo, dat voor elke deelverzameling A van $\mathbb{N}$, hetzij $A \in \mathcal{A}$, hetzij $(\mathbb{N} - A) \in \mathcal{A}$, en niet beide.

   Bepaal de kardinaliteit van $\mathcal{A}$.

b) (5) We definiëren een equivalentierelatie op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ door te zeggen: twee deelverzamelingen A en B van $\mathbb{N}$ zijn equivalent, als zij dezelfde priemgetallen bevatten.

   Bepaal de kardinaliteit van de verzameling equivalentieklassen.

Opgave 2.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ is, die maximaal is m.b.t. de eigenschap, dat als $x, y \in A$ en $x \neq y$, dan $\frac{x+y}{2} \notin A$.

b) (5) Zij A als in deeltje a). Bewijs dat A overaftelbaar is.

Opgave 3. Bewijs door middel van natuurlijke deductie:

a) (4) $\phi \wedge \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \wedge \psi)$

b) (3) $\phi \to \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \to \psi)$

c) (3) $\phi \vee \forall x\psi \vdash \forall x(\phi \vee \psi)$

Hierbij is gegeven, dat steeds de variabele x niet in ϕ voorkomt.

Opgave 4. Laat L de taal $\{\leq, c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ zijn, waarbij $\leq$ een 2-plaatsig relatiesymbool is, en $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ een oneindige verzameling constanten. Laat T de L-theorie zijn met axioma's die zeggen dat $\leq$ een lineaire ordening is, alsmede de axioma's

$$\{c_n \leq c_{n+1} \wedge \neg(c_n = c_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

a) (4) Bewijs dat de theorie T consistent is.

b) (6) In een model M van T noemen we het rijtje $c_0^M < c_1^M < c_2^M < \cdots$ *onbegrensd*, als er voor elke $x \in M$ een n is met $x \leq c_n^M$. Bewijs dat er geen L-theorie T' is waarvan de modellen precies die modellen M van T zijn, waarin het rijtje $c_0^M < c_1^M < c_2^M < \cdots$ onbegrensd is.

Opgave 5:
Ter herinnering: op de klasse van ordinaalgetallen is met transfiniete recursie een optelling gedefinieerd als volgt:

$$\begin{array}{rcll} \alpha + 0 & = & \alpha & \\ \alpha + (\beta + 1) & = & (\alpha + \beta) + 1 & \\ \alpha + \gamma & = & \bigcup_{\beta \in \gamma} (\alpha + \beta) & \text{als } \gamma \text{ een limietordinaal is} \end{array}$$

Laat zien dat er een ordinaalgetal α is waarvoor geldt: $\omega + \alpha = \alpha$, en bepaal het *kleinste* ordinaalgetal met die eigenschap.