Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.

30 januari 2018, 17:00–20:00

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laten L en L' twee talen zijn met $L \subseteq L'$; zij T een L-theorie en T' een L'-theorie met $T \subseteq T'$. De theorie T' heet *conservatief over* T als voor elke L-zin ϕ geldt: als $T' \models \phi$ dan ook $T \models \phi$.

a) (5) Zij P de poset van L'-theorieën T' waarvoor $T \subseteq T'$ en T' conservatief is over T; P is geordend door $\subseteq$. Laat zien dat P voldoet aan de voorwaarden van het lemma van Zorn. [Hint: gebruik de Compactheidsstelling.]

b) (5) Volgens het lemma van Zorn heeft P een maximaal element U. Laat zien dat voor elke L'-zin $\psi \notin U$ er een L'-zin $\chi \in U$ en een L-zin ϕ zijn, waarvoor geldt: $\psi \models \chi \to \phi$ en $T \not\models \phi$. [Hint: gebruik andermaal de Compactheidsstelling.]

Opgave 2. In deze opgave is steeds gegeven: een taal L, een L-structuur M en een substructuur N van M. Bepaal steeds of N een elementaire substructuur is van M. Motiveer je antwoord kort.

a) (3) $L = \{\leq\}$, $M = \mathbb{R}$ (met gewone ordening), $N = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (met gewone ordening).

b) (3) $L = \{\cdot\}$ ($\cdot$ is een 2-plaatsig functiesymbool), $M = \mathbb{R}$ (met gewone vermenigvuldiging), $N = \mathbb{Q}$ (met gewone vermenigvuldiging).

c) (4) $L = \{S\}$ (S is een 1-plaatsig functiesymbool), en

$$\begin{aligned} M &= \{(i,n) \mid i \in \{0,1\},\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{met } S^M(i,n) = (i,n+1) \\ N &= \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{met } S^N(0,n) = (0,n+1) \end{aligned}$$

Opgave 3. Laat L de taal $\{0, S\}$ waar 0 een constante is en S een 1-plaatsig functiesymbool. Zij T de L-theorie met axioma's:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg(S(x) = 0) & \forall x \neg(S^n(x) = x) \ \ (n > 0) \\ \forall x \forall y (S(x) = S(y) \to x = y) & \forall x (\neg(x = 0) \to \exists y (S(y) = x)) \end{array}$$

Hier is $S^n(x)$ een afkorting voor $\underbrace{S(S(\cdots S}_{n \text{ keer}}(x))\cdots)$.

a) (3) Laat zien dat T niet ω-kategorisch is.

b) (4) Bewijs dat T wèl 2^ω-kategorisch is.

c) (3) Bewijs dat T volledig is.

Opgave 4. Geef voor de volgende uitspraken òf een bewijs (door een bewijsboom te construeren), òf een tegenvoorbeeld (in een model).

a) (3) $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \vdash \forall x \exists y (f(y) = x)$.

b) (4) $\phi \wedge \exists x \psi(x) \vdash \exists x (\phi \wedge \psi(x))$ (hierbij wordt verondersteld dat de variabele x niet in ϕ voorkomt).

c) (3) $\exists x \phi(x) \wedge \exists x \psi(x) \vdash \exists x (\phi(x) \wedge \psi(x))$.

Opgave 5. Laat x een verzameling zijn en ω het kleinste oneindige ordinaalgetal. We definiëren met recursie op ω de volgende functie f:

$$f(0) = x \quad f(n+1) = \bigcup f(n)$$

a) (4) Laat zien dat de collectie $\{y \mid \exists n \in \omega (y \in f(n))\}$ een verzameling is. We noteren deze als $T(x)$.

b) (3) Laat zien dat $T(x)$ transitief is.

c) (3) Stel, dat y een transitieve verzameling is met $x \subseteq y$. Bewijs dat $T(x) \subseteq y$.