Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

31 januari 2008, 14.00–17.00

DIT TENTAMEN BESTAAT UIT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE ACHTERKANT.

Advies: maak eerst die sommen, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1:
Stel T is een theorie in een aftelbare taal; we veronderstellen dat T een oneindig model heeft. Bewijs: er zijn twee modellen van T die elementair equivalent zijn, maar niet isomorf [Hint: gebruik de Löwenheim-Skolemstellingen].

Opgave 2:
Laat met bewijsbomen zien:

a) $\{\forall x\phi(x) \to \psi\} \vdash \exists x(\phi(x) \to \psi)$

b) $\{\neg(\phi \to \psi)\} \vdash \phi \wedge \neg\psi$

c) $\{\phi \to \psi\} \vdash (\chi \to \phi) \to (\chi \to \psi)$

Hierbij wordt verondersteld dat in a) de variabele x niet voorkomt in ψ.

Opgave 3:
Stel dat T een maximaal formeel consistente theorie is (dus T is maximaal met de eigenschap dat $T \not\vdash \bot$), en dat T genoeg constanten heeft (d.w.z. voor elke formule $\phi(x)$ met één vrije variabele x is er een constante c zodat $T \vdash \exists x\phi(x) \to \phi(c)$). Bewijs, dat voor elke formule $\phi(x)$ met één vrije variabele x, de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

i) $T \vdash \forall x\phi(x)$

ii) voor alle constanten c geldt $T \vdash \phi(c)$

Opgave 4:
Ter herinnering: als $L \subset L'$ twee talen zijn, T een L-theorie en T' een L'-theorie met $T \subset T'$, dan heet T' *conservatief* over T, als voor elke L-zin ϕ geldt: als $T' \vdash \phi$ dan $T \vdash \phi$.

Stel nu dat we een keten van talen $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots$ hebben, en voor elke $n \geq 0$ een L_n-theorie T_n, zodat $T_0 \subset T_1 \subset \cdots$ en T_{n+1} conservatief is over T_n voor alle n.

Laat $L = \bigcup_n L_n$ en $T = \bigcup_n T_n$. Bewijs: T is conservatief over T_0.

Opgave 5:

a) Stel x is een verzameling van ordinaalgetallen. Bewijs, dat $\bigcup x$ een ordinaalgetal is.

b) Stel x is een verzameling van kardinaalgetallen. Bewijs, dat $\bigcup x$ een kardinaalgetal is.