Grondslagen van de Wiskunde
Deeltentamen B met beknopte uitwerking

1 februari 2007, 14:00–17:00.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven; lees ook de achterzijde. Alle opgaven tellen even zwaar. Advies: doe eerst die opgaven, die je kunt, en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1 Stel dat T een L-theorie is met de eigenschap dat er voor elke L-formule $\varphi(\vec{x})$ een kwantorvrije L-formule $\psi(y,\vec{x})$ is zodat

$$T \models \forall\vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\psi(y,\vec{x}))$$

(a) Bewijs: voor iedere L-formule $\varphi(\vec{x})$ is er ook een kwantorvrije L-formule $\chi(y,\vec{x})$ zodat $T \models \forall\vec{x}(\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \forall y\chi(y,\vec{x}))$

Oplossing: gegeven $\varphi(\vec{x})$, kies met het gegeven in de opgave een kwantorvrije formule $\chi'(y,\vec{x})$ zodat $T \models \forall\vec{x}(\neg\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \exists y\chi'(y,\vec{x}))$. Duidelijk geldt dan voor $\chi(y,\vec{x}) \equiv \neg\chi'(y,\vec{x})$ dat $T \models \forall\vec{x}(\varphi(\vec{x} \leftrightarrow \forall y\chi(y,\vec{x}))$.

(b) Bewijs: als M en N modellen van T zijn en M is een substructuur van N, dan is M een elementaire substructuur van N.

Oplossing: stel $M \subset N$ en $a_1,\ldots,a_n \in M$, $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ een L-formule. We moeten bewijzen, dat $M \models \varphi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow N \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$. Stel $M \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$. Laat $\psi(y,\vec{x})$ zijn als in het gegeven van de opgave. Omdat M een model is van T, geldt dan $M \models \psi(a,a_1,\ldots,a_n)$ voor zekere $a \in M$. Omdat ψ kwantorvrij is, volgt dan ook $N \models \psi(a,a_1,\ldots,a_n)$, dus $N \models \exists y\psi(y,a_1,\ldots,a_n)$. Omdat tenslotte ook N een model van T is, volgt $N \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$.

Voor de andere richting: dit gaat analoog, maar nu gebruiken we een formule χ als in deeltje (a).

Opgave 2 Stel T is een theorie in een aftelbare taal L, met de eigenschappen:

(i) T heeft oneindige modellen;

(ii) Als M en N twee aftelbaar oneindige modellen van T zijn, dan is $M \cong N$.

(a) Is T noodzakelijkerwijs volledig? Motiveer je antwoord.

Oplossing: Nee. Want T kan eindige modellen hebben. Voorbeeld: de theorie van vectorruimten over $\mathbb{F}_2$ (het lichaam met 2 elementen).

(b) Laat zien dat er een L-theorie T' is zodat de modellen van T' precies de oneindige modellen van T zijn.

Oplossing: neem voor elke n de zin ϕ_n in de lege taal, die uitdrukt 'er zijn minstens n elementen', en laat $T' = T \cup \{\phi_n \mid n \geq 1\}$.

(c) Bewijs dat T' volledig is.

Oplossing: de theorie T' heeft alleen oneindige modellen en is, blijkens het gegeven (i), ω-categorisch (en de taal L is aftelbaar). Volgens de Łos-Vaught test is T' volledig.

Opgave 3 Zij T een theorie en zij c een constante die niet voorkomt in T. Stel dat de theorie $T \cup \{\varphi(c), \neg\psi(c)\}$ inconsistent is. Bewijs dat

(a) $T \cup \{\varphi(c)\} \models \psi(c)$.

Oplossing: laat M een $L \cup \{c\}$-structuur zijn die model is van $T \cup \{\varphi(c)\}$. Als $M \not\models \psi(c)$, dan $M \models \neg\psi(c)$ en zou volgen dat $T \cup \{\varphi(c), \neg\psi(c)\}$ consistent was. Dus $M \models \psi(c)$. We concluderen dat $T \cup \varphi(c) \models \psi(c)$.

(b) $T \models \forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$.

Stel M is een model van T en $a \in M$ voldoet aan $M \models \varphi(a)$. Beschouw nu M als $L \cup \{c\}$-structuur, door te zetten $c^M = a$. Dan is M een model van $T \cup \{\varphi(c)\}$, dus met deeltje (a) volgt dat ook $M \models \psi(c)$ oftewel $M \models \psi(a)$. Dit geldt voor alle $a \in M$, dus $M \models \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$, als verlangd.

Opgave 4 Construeer bewijsbomen voor de volgende uitspraken:

(a) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

(b) $\vdash \varphi \vee (\psi \vee \chi) \to (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

(c) $\vdash \exists x\varphi(x) \to \exists y\varphi(y)$.

Opgave 5 Ter herinnering: als T een L-theorie is en T' een uitbreiding van T in een taal $L' \supset L$, dan heet T' *conservatief* over T als voor elke L-zin ϕ waarvoor geldt $T' \models \phi$, ook geldt $T \models \phi$.
Laat nu $L = \{<\}$ en T de theorie DLO van dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten. Zij L' de uitbreiding van L met 1-plaatsige functiesymbolen $f, f_0, f_1, \ldots$ en laat, tenslotte, T' de uitbreiding van T zijn met de volgende L'-zinnen:

$$\{\forall x(x < f_n(x) < f_{n+1}(x) < f(x)) \,|\, n \geq 0\}$$

Laat zien dat T' conservatief is over T.

Oplossing: we laten zien dat elk model van T uitgebreid kan worden met interpretaties voor de functiesymbolen $f, f_0, f_1, \ldots$, zodat de resulterende L'-structuur een model is van T'. Dit bewijst wat we willen, immers stel ϕ is een L-zin en $T' \models \phi$ maar $T \not\models \phi$. Dan is er een model M van T zodat $M \not\models \phi$, maar als we dit dan uitbreiden tot model van T' krijgen we een tegenspraak met $T' \models \phi$.
Stel dus $M \models T$, dus M is een dichte lineaire ordening zonder eindpunten. Kies voor elke $x \in M$ een $f(x)$ zodat $x < f(x)$. Dit kan, want M heeft geen grootste element. Vervolgens, pas herhaaldelijk de dichtheid van de ordening toe om successievelijk $f_0(x), f_1(x), \ldots$ te kiezen zodat $x < f_0(x) < f_1(x) < \cdots < f(x)$.