Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A
Beknopte uitwerking

6 november 2007, 9.00-12.00

Opgave 1. Laten X, Y, Z oneindige verzamelingen zijn en $f : X \to Y$ een surjectieve functie.
Bewijs: als $|Y| \leq |Z|$ en voor elke $y \in Y$ is $|f^{-1}(y)| \leq |Z|$, dan is $|X| \leq |Z|$.

Uitwerking: uit de gegevens halen we dat er voor elke $y \in Y$ een injectieve functie $g_y : f^{-1}(y) \to Z$ is; en dat er een injectieve functie $h : Y \to Z$ is. Daaruit is makkelijk af te leiden dat de functie $F : X \to Z \times Z$ gedefinieerd door

$$F(x) = (g_{f(x)}(x), h(f(x)))$$

injectief is. Volgens het dictaat is er ook een injectieve functie van $Z \times Z$ naar Z, omdat Z oneindig is. Samenstellen met F levert dan een injectieve functie $X \to Z$ op, dus $|X| \leq |Z|$ als verlangd.

Opgave 2. Volgens Hartogs' Lemma, toegepast op de verzameling $\mathbb{N}$, is er een welordening W die overaftelbaar (d.w.z.: niet aftelbaar) is.

a) Leid hieruit af, dat er een welordening L bestaat met de volgende twee eigenschappen:

   i) L is overaftelbaar

   ii) voor elke $x \in L$ is $\{y \in L \,|\, y < x\}$ aftelbaar

   [Hint: als W een overaftelbare welordening is, beschouw dan de verzameling van die elementen $x \in W$ waarvoor de verzameling $\{y \in W \,|\, y < x\}$ overaftelbaar is]

b) Laat L zo'n welordening zijn als in a). Bewijs: als $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ een stijgend rijtje in L is, dan heeft dat rijtje een bovengrens in L.

Uitwerking: a) Stel W is een overaftelbare welordening en $W' \subset W$ is de verzameling uit de hint. Er zijn twee mogelijkheden: $W' = \emptyset$, in dat geval voldoet W zelf aan i) en ii); of $W' \neq \emptyset$, in dat geval heeft W' een kleinste element x_0. Laat $L = \{y \in W \,|\, y < x_0\}$, met de ordening van W. Dan is L overaftelbaar omdat $x_0 \in W'$, en L voldoet aan ii) omdat x_0 het kleinste element van W' is. Tenslotte is L een welordening, want elke deelverzameling van een welordening is weer een welordening.

b) Voor elke n is $\downarrow x_n = \{y \in L \,|\, y < x_n\}$ aftelbaar. Dus is ook $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \downarrow x_n$ aftelbaar. L is overaftelbaar, dus er is een $y \in L - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \downarrow x_n$. Dan geldt: $y \geq x_n$ voor alle n. Dus y is een bovengrens voor het rijtje.

Opgave 3. Gegeven is een gerichte graaf, met verzameling punten V. Als $x, y \in V$ schrijven we $R(x,y)$ voor de bewering dat er een pijl is van x naar y. Bewijs, dat er een deelverzameling A van V is met de eigenschappen:

i) voor alle $x, y \in A$ met $x \neq y$ geldt *niet* $R(x,y)$

ii) voor elke $x \in V - A$ is er een $y \in A$ zodat $R(x,y)$ of $R(y,x)$

[Hint: laat zien dat het lemma van Zorn toepasbaar is op de poset van alle deelverzamelingen van V die aan i) voldoen]

Uitwerking: Laat P de poset uit de hint zijn (de ordening is inclusie van deelverzamelingen van V). P is niet-leeg, want $\emptyset$ voldoet aan i). Stel, dat $\{C_i \,|\, i \in I\}$ een keten in P is. Bewering: ook $\bigcup_i C_i$ is een element van P, want neem $x, y \in \bigcup_i C_i$. Omdat de C_i een keten vormen, is er een i zodat $x, y \in C_i$. $C_i \in P$ dus $R(x,y)$ geldt *niet*. We concluderen dat P aan de voorwaarden van het lemma van Zorn voldoet, en derhalve een maximaal element heeft. Noem dit A. Dan geldt i) voor A omdat $A \in P$. Stel nu $x \in V - A$. Dan volgt uit de maximaliteit van A dat $A \cup \{x\}$ geen element van P is; er zijn dus $y, z \in V - A$ zodat $R(y,z)$ geldt. We kunnen niet hebben dat $y, z \in A$, dus één van de twee is gelijk aan x; in dat geval geldt ii).

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de taal L_{pos} van posets: er is één 2-plaatsig relatiesymbool $\leq$.

a) Laat M de L_{pos}-structuur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ zijn. Geef een L_{pos}-formule $\phi(x)$ met één vrije variabele x, zodat voor alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt:

$$M \models \phi(A) \;\Leftrightarrow\; \mathbb{N} - A \text{ heeft precies twee elementen}$$

b) We hebben de volgende twee partiële ordeningen op $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} (x,y) \leq_1 (x',y') & \text{als} & x \leq x' \text{ en } y \leq y' \\ (x,y) \leq_2 (x',y') & \text{als} & x \leq x' \text{ of } (x = x' \text{ en } y \leq y') \end{array}$$

(Hier is uiteraard $\leq$ op $\mathbb{N}$ de gebruikelijke ordening) Laten M_1 en M_2 respectievelijk de L_{pos}-structuren $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_1)$ en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_2)$ zijn.

Geef een L_{pos}-zin ϕ die waar is in M_1 maar onwaar in M_2.

Uitwerking.a): $\mathbb{N} - A$ heeft precies 2 elementen, precies dan als er 3 deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn waarvan A een echte deelverzameling is (nl. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} - \{a\}$ en $\mathbb{N} - \{b\}$, als $A = \mathbb{N} - \{a, b\}$). Dus voor $\phi(x)$ kun je nemen de formule

$$\begin{gathered} \exists y \exists z \exists w [\neg(x = y) \wedge \neg(x = w) \wedge \neg(x = z) \wedge \\ \neg(y = w) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(w = z) \wedge x \leq y \wedge x \leq w \wedge x \leq z \wedge \\ \forall u (x \leq u \rightarrow x = u \vee u = y \vee u = z \vee u = w)] \end{gathered}$$

In b), merk op dat de ordening $\leq_2$ lineair is, in tegenstelling tot $\leq_1$. Dus voor ϕ kun je nemen de zin

$$\neg\forall x\forall y(x \leq y \vee y \leq x)$$

Opgave 5. Zij L_{grp} de taal van groepen: er is één constante e (voor eenheidselement), en één 2-plaatsig functiesymbool $\cdot$ (voor vermenigvuldiging). Laat T de volgende L_{grp}-theorie zijn:

$$T \;=\; \{\phi \,|\, \text{voor elke eindige groep } G \text{ geldt } G \models \phi\}$$

Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er een oneindige groep is, die model is van T.

Uitwerking. We hebben in het college gezien dat er voor elke $n \geq 1$ een zin ϕ_n is die uitdrukt "er zijn minstens n elementen". Beschouw nu de theorie

$$T' = T \cup \{\phi_n \,|\, n \geq 1\}$$

Bewering: T' is consistent. Want stel dat T'' een eindige deeltheorie van T' is, dan is T'' bevat in een theorie $T \cup \{\phi_n \,|\, 1 \leq n \leq k\}$ voor zekere k. Dan is elke eindige groep van orde $\geq k$ een model van T''. Met de Compactheidsstelling concluderen we dat T' consistent is. T' heeft dus een model, zeg G. Dan is G een groep, want de groepsaxioma's maken deel uit van T en dus van T'. En G is oneindig, want G is model van alle ϕ_n.