Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A
Met beknopte uitwerking

4 oktober 2012, 13:15–16:15

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Laat X een oneindige verzameling zijn en $A \subseteq X^X$ een *oneindige* verzameling van functies $X \to X$. Zij $\bar{A}$ de kleinste deelverzameling van X^X die voldoet aan: $A \subseteq \bar{A}$ en $\bar{A}$ is gesloten onder compositie: als $f, g \in \bar{A}$ dan ook $gf \in \bar{A}$.

Bewijs, dat $|\bar{A}| = |A|$.

Uitwerking: Laat A^* de verzameling van alle eindige, niet-lege rijtjes elementen van A zijn. Definieer $C : A^* \to \bar{A}$ door $C(f_1, \ldots, f_n) = f_1 \cdots f_n$ (compositie). Dan voldoet $\mathrm{im}(C)$ aan de eisen voor $\bar{A}$, dus C is surjectief. We concluderen dat $|\bar{A}| \leq |A^*|$.

Nu is $A^* \sim \coprod_{n=1}^{\infty} A^n$. Uit het dictaat weten we dat omdat A oneindig is, $A \sim A \times A$ en met inductie ook $A \sim A^n$ voor alle $n \geq 1$. We krijgen: $A^* \sim \coprod_{n=1}^{\infty} A \sim \mathbb{N} \times A \sim A$. Deze berekening toont aan dat $|\bar{A}| \leq |A|$. De omgekeerde ongelijkheid volgt direct omdat $A \subseteq \bar{A}$, zodat de gelijkheid $|\bar{A}| = |A|$ volgt met de stelling van Cantor-Schröder-Bernstein.

Opgave 2.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een deelverzameling $\mathcal{U}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bestaat die maximaal is m.b.t. de eigenschappen:

   i) elke $A \in \mathcal{U}$ is oneindig;

   ii) voor elk tweetal $A, B \in \mathcal{U}$ met $A \neq B$ is $A \cap B$ eindig;

iii) voor elke eindige deelverzameling $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van $\mathcal{U}$ is $\mathbb{N} - (\bigcup_{i=1}^n A_i)$ oneindig.

b) (2) Zij $\mathcal{U}$ als in deeltje a). Bewijs, dat $\mathcal{U}$ oneindig is.

c) (3) Zij $\mathcal{U}$ als in deeltje a). Bewijs, dat $\mathcal{U}$ overaftelbaar is [Hint: laat zien dat elke aftelbaar oneindige verzameling die voldoet aan i)–iii) van deeltje a), uitgebreid kan worden met één element].

Uitwerking: a) Zij P de poset van alle deelverzamelingen $\mathcal{U}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die aan i)–iii) voldoen, geordend door inclusie. We bewijzen dat P aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn voldoet. P is niet-leeg, want $\emptyset \in P$. Stel nu, dat $\mathcal{C}$ een keten in P is. Laat $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{C}$. Als $A \in \mathcal{V}$ dan is er een $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ zodat $A \in \mathcal{U}$; omdat $\mathcal{U} \in P$ is A oneindig. Dus $\mathcal{V}$ voldoet aan i). Als $A, B \in \mathcal{V}$ en $A \neq B$, dan is er, omdat $\mathcal{C}$ een keten is, een $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ zodat $A, B \in \mathcal{U}$. Omdat $\mathcal{U} \in P$ dus aan ii) voldoet, is $A \cap B$ eindig. Dus $\mathcal{V}$ voldoet aan ii). Tenslotte, als $\{A_1, \ldots, A_n\}$ een eindige deelverzameling van $\mathcal{V}$ is, dan is er (weer omdat $\mathcal{C}$ een keten is) een element $\mathcal{U}$ van $\mathcal{C}$ zodat $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{U}$; en omdat $\mathcal{U}$ aan iii) voldoet is dus het complement van $\bigcup_{i=1}^n A_i$ eindig. Dus $\mathcal{V}$ voldoet aan iii). We concluderen dat $\mathcal{V} \in P$ en $\mathcal{V}$ is dus een bovengrens voor $\mathcal{C}$. De poset P voldoet dus aan de voorwaarden van het Lemma van Zorn en heeft een maximaal element, als verlangd.
b) Stel $\mathcal{U} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Dan is wegens ii), $B = \mathbb{N} - (\bigcup_{i=1}^n A_i)$ oneindig. Kies een deelverzameling $C \subseteq B$ zodat zowel C als $B - C$ oneindig zijn. Dan voldoet duidelijk ook $\mathcal{U} \cup \{B\}$ aan i)–iii), maar dit is in strijd met de maximaliteit van $\mathcal{U}$.
c) Stel $\mathcal{U}$ is aftelbaar; wegens b) mogen we $\mathcal{U}$ dan aftelbaar oneindig veronderstellen; schrijf $\mathcal{U}$ als $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ met $A_i \neq A_j$ voor $i \neq j$. Omdat $\mathcal{U}$ aan ii) voldoet geldt dat $A_i - (\bigcup_{j<i} A_j)$ oneindig is. Laat nu, voor iedere n, a_n het kleinste element van $A_n - (\bigcup_{j<n} A_j)$ zijn. Zij $B = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Dan is B oneindig; $B \cap A_n \subseteq \{b_0, \ldots, b_n\}$ en is dus eindig; en omdat $A_{n+1} - (B \cup \bigcup_{i \leq n} A_i)$ oneindig is (want A_{n+1} is oneindig en heeft eindige doorsnede met $B \cup \bigcup_{i \leq n} A_i)$), heeft $B \cup \bigcup_{i \leq n} A_i)$ oneindig complement. We concluderen dat $\mathcal{U} \cup \{B\}$ aan i)–iii) voldoet; in strijd met de maximaliteit van $\mathcal{U}$.

Opgave 3. Herinner, dat een *beginsegment* van een lineaire ordening $(A, \leq)$ een deelverzameling $B \subseteq A$ is die voldoet aan: als $x \in B$ en $y \leq x$, dan ook $y \in B$. We beschouwen elke deelverzameling van A ook als geordende verzameling, met de ordening geërfd van A.

Stel nu, dat $(A, \leq)$ een lineaire ordening is met de eigenschap, dat elke deelverzameling van A, als geordende verzameling, isomorf is met een beginsegment van A. Bewijs, dat A een welordening is [Hint: bewijs eerst, dat A òf leeg is, òf een kleinste element heeft].

Uitwerking: Als $A = \emptyset$ dan is A een welordening. Stel dus A niet-leeg; zeg $a \in A$. Dan is $\{a\}$ isomorf met een beginsegment van A. Een beginsegment met één element betekent dat A een minimaal element heeft; maar omdat A een lineaire ordening is is elk minimaal element een kleinste element. Dus A heeft een kleinste element a_0.

Stel nu $B \subseteq A$ een niet-lege deelverzameling. Volgens de aanname is B orde-isomorf met een beginsegment C van A. C is niet-leeg, dus $a_0 \in C$. Dan is a_0 het kleinste element van C, dus als a_0 correspondeert met $b_0 \in B$ onder het isomorfisme tussen B en C, dan is b_0 het kleinste element van B. We concluderen dat A een welordening is.

Opgave 4. Gegeven is de taal $L = \{f\}$, waar f een 1-plaatsig functiesymbool is. We beschouwen de volgende 4 L-structuren:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \mathbb{N} \text{ met } f^{M_1}(n) = n + 1 \\
M_2 &= \{0, 1, 2, 3\} \text{ met } f^{M_2}(n) \equiv n + 1 \pmod 4 \\
M_3 &= \mathbb{R} \text{ met } f^{M_3}(x) = x^2 \\
M_4 &= [0, 1] \text{ met } f^{M_4}(x) = \sin(x)
\end{aligned}$$

Geef voor elke structuur M_i een L-zin ϕ_i die waar is in M_i maar onwaar in elk van de andere structuren.

Uitwerking: Bijvoorbeeld:

ϕ_1 is $\neg\forall x \exists y(f(y) = x) \wedge \neg\exists x(f(x) = x)$

ϕ_2 is $\forall x \exists y(f(y) = x)$

ϕ_3 is $\exists x \exists y(\neg(x = y) \wedge f(x) = f(y))$

ϕ_4 is $\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \wedge \neg\phi_3$

Opgave 5. Zij L een taal en M een oneindige L-structuur. Herinner: L_M is de taal L uitgebreid met extra constanten $\{\bar{m} \mid m \in M\}$. We schrijven $E(M)$ voor de verzameling van alle L_M-zinnen die waar zijn in M.

Neem nu aan dat c een nieuwe constante is (die dus niet in L_M voorkomt); en zij T de volgende $L_M \cup \{c\}$-theorie:

$$T \;=\; E(M) \,\cup\, \{\neg(c = \bar{m}) \,|\, m \in M\}$$

a) (5) Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling, dat de theorie T consistent is;

b) (2) Stel M' is een model van T. Laat zien dat de functie $\iota : M \to M'$, gegeven door $\iota(m) = \bar{m}^{M'}$ (de interpretatie van de constante $\bar{m}$ in M'), injectief is;

c) (3) Laat zien dat er geen L_M-formule $\phi(x)$ met één vrije variabele x is zodat voor alle $a \in M'$ geldt: $M' \models \phi(a)$ precies als $a \in \mathrm{im}(\iota)$.

Uitwerking: a) Elke eindige deeltheorie van T is een deelverzameling van $E(M) \cup \{\neg(c = \bar{m}_1), \ldots, \neg(c = \bar{m}_n)\}$ voor zekere $m_1, \ldots, m_n \in M$. Omdat M oneindig is, kunnen we een m buiten $\{m_1, \ldots, m_n\}$ kiezen en M tot een $L_M \cup \{c\}$-structuur maken, door te definiëren: $c^M = m$. Met deze definitie wordt M een model van $E(M) \cup \{\neg(c = \bar{m}_1), \ldots, \neg(c = \bar{m}_n)\}$. We concluderen dat elke eindige deeltheorie van T consistent is; volgens de Compactheidsstelling is T consistent.

b) Als $m, m' \in M$ en $m \neq m'$, dan is $\neg(\bar{m} = \bar{m'})$ een L_M-zin die waar is in M, dus een element van $E(M)$. Omdat M' een model is van T, i.h.b. van $E(M)$, geldt dus $M' \models \neg(\bar{m} = \bar{m'})$. Dat wil zeggen dat $m^{M'} \neq m'^{M'}$; oftewel $\iota(m) \neq \iota(m')$. Dus ι is injectief.

c) Stel, zo'n $\phi(x)$ was er wel. Dan geldt voor alle $m \in M$ dat $M' \models \phi(\bar{m})$. Nu is $\phi(\bar{m})$ een L_M-zin, en er volgt dat $\phi(\bar{m})$ een element is van $E(M)$ (want anders was $\neg\phi(\bar{m})$ een element van $E(M)$, en M' is een model van $E(M)$). Dus $M \models \phi(\bar{m})$, voor alle $m \in M$. Maar dat betekent dat $M \models \forall x \phi(x)$. Zodat de L_M-zin $\forall x \phi(x)$ een element is van $E(M)$, en dus $M' \models \forall x \phi(x)$. Maar hieruit volgt dat $M \models \phi(c)$, terwijl $c^M \notin \mathrm{im}(\iota)$. Tegenspraak.