Tentamen Grondslagen van de Wiskunde, 3 februari 2021, 11.30-14.30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. In deze opgave beschouwen we de machtsverzameling $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ van de verzameling $\mathbb{N}$ van natuurlijke getallen; met op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de operatie

$$U, V \mapsto U + V = (U \cup V) - (U \cap V)$$

(zie eventueel blz. 38–39 van het boek).

a) (5 punten) Bewijs met het lemma van Zorn dat er een deelverzameling $\mathcal{A}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ bestaat die maximaal is m.b.t. de volgende eigenschappen:

   i) voor alle $U, V \in \mathcal{A}$ geldt $U + V \in \mathcal{A}$.

   ii) $\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$.

b) (2 punten) Zij $\mathcal{A}$ als in deeltje a). Bewijs: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

c) (3 punten) Zij $\mathcal{A}$ als in deeltje a). Bewijs: voor alle $W \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt: $W \in \mathcal{A}$ of $\mathbb{N} - W \in \mathcal{A}$.

Opgave 2. In deze opgave beschouwen we een niet-lege, aftelbare welordening L die geen grootste element heeft.

a) (4 punten) Bewijs: er is een injectieve, strict stijgende functie $n \mapsto b_n : \mathbb{N} \to L$ (oftewel een rijtje $b_0 < b_1 < b_2 < \cdots$ in L), zo dat voor elke $t \in L$ er een $n \in \mathbb{N}$ is met $t < b_n$.

b) (3 punten) Schrijf $L_{<l}$ voor $\{x \in L \,|\, x < l\}$. Bewijs: als er voor elke $l \in L$ een injectieve, stijgende functie $L_{<l} \to \mathbb{R}$ is, dan is er ook zo'n functie van L naar $\mathbb{R}$.

c) (3 punten) Laat zien dat de uitspraak in b) niet meer geldt, als we de aanname dat L aftelbaar is, laten vallen.

Opgave 3. In deze opgave kijken we naar de theorie van Peano Rekenkunde, geformuleerd in de taal L_{rings} van ringen; zie Voorbeeld 2.5.4 (blz. 59) van het boek. Voor elk natuurlijk getal n hebben we de L_{rings}-term

$$\overline{n} \;=\; \underbrace{1+(1+(\cdots+1))}_{\text{n}}$$

Gebruik de Compactheidsstelling om te laten zien dat er een L_{rings}-structuur M bestaat met de volgende eigenschappen:

i) $\mathbb{N}$ is een elementaire substructuur van M.

ii) In M bestaat een element c zodat voor elk priemgetal p de L_{rings}-zin $\exists x(x{\cdot}\overline{p} = c)$ waar is in M.

Opgave 4. Een L-theorie heet *model compleet* als voor elk tweetal modellen M, N van T geldt: als M een substructuur van N is dan is M een elementaire substructuur van N. We beschouwen de volgende eigenschap van een L-theorie T:

(*) Voor elke L-formule $\phi(\vec{u})$ is er een L-formule $\exists x_1 \cdots \exists x_k \psi(\vec{x}, \vec{u})$, met ψ kwantorvrij, zodat

$$T \models \forall\vec{u}(\phi(\vec{u}) \leftrightarrow \exists\vec{x}\psi(\vec{x}, \vec{u}))$$

a) (4 punten) Laat zien: als T de eigenschap (*) heeft dan is er voor elke L-formule ϕ ook een L-formule $\forall x_1 \cdots \forall x_k \chi(\vec{x}, \vec{u})$, met χ kwantorvrij, zodat

$$T \models \forall\vec{u}(\phi(\vec{u}) \leftrightarrow \forall\vec{x}\chi(\vec{x}, \vec{u}))$$

b) (6 punten) Laat zien: als T de eigenschap (*) heeft, dan is T model compleet.

Opgave 5: In hoofdstuk 1 van het boek hebben we het begrip "de kardinaliteit van verzameling X" (notatie: $|X|$) alleen gedefinieerd in uitdrukkingen als $|X| \leq |Y|$, wat betekende: er is een 1-1 functie $X \to Y$. In hoofdstuk 4 (p. 111) definiëren we de kardinaliteit van X als het kleinste ordinaalgetal α zodat er een bijectie $X \to \alpha$ bestaat; laten we hiervoor de notatie $\kappa(X)$ gebruiken.

a) (5 punten) Stel dat $g : X \to \alpha$ een injectieve functie is, met α een ordinaalgetal. Bewijs: $\kappa(X) \leq \alpha$.

b) (5 punten) Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn, voor verzamelingen X en Y:

   i) Er is een 1-1 functie $X \to Y$

   ii) $\kappa(X) \leq \kappa(Y)$