Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

19 december 2023, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Geef voor elk van de onderstaande verzamelingen aan of zij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (2 pt) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt: als } n+1 \in A, \text{ dan } n \in A\}$

b) (3 pt) $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - A \text{ is oneindig}\}$

c) (3 pt) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt: } f(n) < f(n+1)\}$

d) (2 pt) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt: } f(n) > f(n+1)\}$

Opgave 2. In deze opgave is een *graaf* een verzameling X met daarop een relatie $R \subseteq X \times X$. Als $x, y \in X$ dan is een *pad* van x naar y een rijtje

$$(x = x_0, \ldots, x_n = y)$$

voor $n \geq 0$, zodat voor alle $i < n$ geldt: $(x_i, x_{i+1}) \in R$ of $(x_{i+1}, x_i) \in R$. Merk op het geval $n = 0$: (x) is een pad van x naar x. We schrijven $x \sim y$ als er een pad is van x naar y.

a) (5 pt) Laat zien dat er voor elke $x \in X$ een deelverzameling U_x van X is die maximaal is m.b.t. de eigenschappen:

   i) $x \in U_x$

   ii) voor alle $y, z \in U_x$ geldt $y \sim z$.

   Hier betekent "maximaal": ten opzichte van de inclusie-ordening. Hint: je kunt het Lemma van Zorn gebruiken.

b) (3 pt) Laat zien: als $x \not\sim y$ dan is $U_x \cap U_y = \emptyset$.

c) (2 pt) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Opgave 3.

a) (4 pt) Bewijs dat er een overaftelbare welordening bestaat. Hint: gebruik het Lemma van Hartogs.

b) (4 pt) Bewijs dat er een welordening L bestaat met de eigenschappen:

  i) L is overaftelbaar.

  ii) Voor elke $x \in L$ is $L_{<x} = \{y \in L \mid y < x\}$ aftelbaar.

c) (2 pt) Laat L zijn zoals in b). Bewijs dat er geen stijgend rijtje $x_0 < x_1 < \cdots$ in L is zodat voor elke $y \in L$ er een n is met $y < x_n$.

Opgave 4. Als we twee posets $(P, \leq)$ en $(Q, \leq)$ hebben, dan ordenen we $P + Q$ als volgt (ter herinnering: $P + Q$ is de verzameling $(\{0\} \times P) \cup (\{1\} \times Q)$): $(0, p) \leq (0, p')$ als $p \leq p'$ in P; $(1, q) \leq (1, q')$ als $q \leq q'$ in Q; en $(0, p) < (1, q)$ altijd. In onderstaande opgave hebben $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ de gebruikelijke ordening.

We werken met de taal $L = \{\leq\}$ van posets.

a) (3 pt) Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{N}$ maar onwaar in $\{0\} + \mathbb{Z}$.

b) (2 pt) Geef een L-zin die waar is in $\{0\} + \mathbb{Z}$ maar onwaar in $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$.

c) (2 pt) Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ maar onwaar in $\mathbb{N} + \mathbb{N}$.

d) (3 pt) Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ maar onwaar in $\mathbb{N}$.

Motiveer je zinnen kort: geef aan wat je bedoelt te zeggen.

Opgave 5. We beschouwen de taal L van ringen: L heeft constanten 0 en 1, en binaire functiesymbolen $+$ en $\cdot$ voor optelling en vermenigvuldiging. We beschouwen ook de L-structuur $\mathbb{N}$ met gebruikelijke operaties. Ter herinnering: voor elk natuurlijk getal n is er een L-term $\bar{n} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ waarvoor geldt: $\bar{n}^{\mathbb{N}} = n$.

Bewijs dat er een L-structuur M is met de eigenschappen:

i) M en $\mathbb{N}$ maken precies dezelfde L-zinnen waar.

ii) Er is een element $m \in M$ waarvoor geldt: $M \models \exists x(x \cdot \bar{p} = m)$ voor elk priemgetal p.

Hint: gebruik de Compactheidsstelling.