Tentamen Grondslagen van de Wiskunde

18 December 2000, 14.00–17.00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1.a) Laat zien dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn, voor een verzameling A:

1) A is eindig;

2) elke injectieve functie van A naar A is ook surjectief.

b) Heb je in het bewijs van deeltje a) het keuze-axioma gebruikt? Zo ja, geef aan waar.

Opgave 2. Zij $(P, \leq)$ een partieel geordende verzameling met de eigenschap dat P geen oneindige strict dalende rijtjes

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots$$

bevat.

a) Bewijs, dat elke niet-lege deelverzameling van P een minimaal element heeft.

b) Zij Y een willekeurige verzameling en $g : \mathcal{P}(Y) \to Y$ een functie. Laat zien dat er een uniek bepaalde functie $f : P \to Y$ is die voldoet aan de betrekking
$$f(x) = g(\{f(y) \mid y < x\}), \;\; x \in P$$

Opgave 3. Zij L de taal van gerichte grafen. Ter herinnering: L heeft twee 1-plaatsige relatiesymbolen V en E, respectievelijk voor "vertices" (punten) en "edges" (pijlen), en twee 2-plaatsige relatiesymbolen S en T voor "source" (beginpunt) en "target" (eindpunt).

De axioma's voor gerichte grafen zijn:

$$\begin{array}{ll}
\forall x(E(x) \vee V(x)) & \forall x \neg(E(x) \wedge V(x)) \\
\forall xy(S(x,y) \to V(x) \wedge E(y)) & \forall xy(T(x,y) \to V(x) \wedge E(y)) \\
\forall xyz(S(x,z) \wedge S(y,z) \to x = y) & \forall xyz(T(x,z) \wedge T(y,z) \to x = y) \\
\forall z(E(z) \to \exists xy(S(x,z) \wedge T(y,z))) &
\end{array}$$

Als M een gerichte graaf is, kunnen we een relatie R op V^M (de verzameling punten van M) definiëren door te zetten

$$R = \{(v, w) \in V^M \times V^M \mid M \models \exists y(S(v, y) \wedge T(w, y))\}$$

Geef L-zinnen die de volgende eigenschappen van R uitdrukken (in de zin dat een gerichte graaf M de zin waar maakt precies dan als de bij M horende relatie R de betreffende eigenschap heeft):

a) R is (de grafiek van) een functie $V^M \to V^M$;

b) R is een transitieve relatie op V^M.

Een bewijs wordt niet gevraagd.

Opgave 4. We beschouwen weer de taal L en axioma's voor gerichte grafen als in Opgave 3.

In deze opgave noemen we een gerichte graaf M *wegsamenhangend* als er tussen elke twee punten een eindig "pad" loopt; dat wil zeggen, als er voor elk tweetal punten (m, n) een rijtje

$$m = m_0, \ldots, m_k = n$$

is voor zekere $k \geq 1$, zodat voor iedere $i = 0, \ldots, k-1$ geldt:

$$M \models \exists y(S(m_i, y) \wedge T(m_{i+1}, y))$$

Bewijs, dat er geen theorie T in de taal L is die de axioma's van Opgave 3 bevat, en zodanig is dat voor elke gerichte graaf M geldt:

$$M \text{ is een model van } T \iff M \text{ is wegsamenhangend}$$

Opgave 5. Geef bewijsbomen voor de volgende uitspraken:

a) $\phi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$

b) $\vdash (\phi \to \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)$

c) $\vdash \exists x(R(x) \to \forall y R(y))$