Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB323 werd in 2003/2004 gegeven door Jaap van Oosten.

Grondslagen van de Wiskunde (WISB323)
10 november 2003

DIT TENTAMEN BESTAAT UIT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE ACHTERKANT.
Advies: maak eerst die sommen, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1

Stel, dat $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een verzameling functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is die de volgende eigenschap heeft: voor elke functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is er een $g \in \mathcal{A}$, zodat er voor alle $n \in \mathbb{N}$ een $m \geq n$ is met $f(m) < g(m)$. Bewijs, dat $\mathcal{A}$ niet aftelbaar is.

Opgave 2

Laat $(P, \leq)$ een poset zijn. We noemen een deelverzameling $A \subseteq P$ *dwars* als voor elk paar elementen x, y van A geldt: als $x \leq y$ dan $x = y$.
Een deelverzameling B van P heet een *doorsnede* van P, als voor elke $x \in P$ er een $y \in B$ is, zodat $x \leq y$ of $y \leq x$ geldt.

a) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn, dat er een maximale dwarse deelverzameling van P bestaat.

b) Laat $A \subseteq P$ een maximale dwarse deelverzameling zijn. Bewijs, dat A een doorsnede van P is.

c) Laat $A \subseteq P$ als in b). Laat zien, dat geen $A_1 \subsetneq A$ een doorsnede van P is.

Opgave 3

Gegeven is een welordening W die overaftelbaar is (dus $|W| > \omega$). Met L geven we de verzameling limiet-elementen van W aan.

a) Bewijs, dat er een injectieve functie $W \to L \times \mathbb{N}$ bestaat.

b) Bewijs, dat $|W| = |L|$.

Opgave 4

Laat L een taal zijn met één constante e en één 2-plaatsig functiesymbool F. We beschouwen de volgende drie L-structuren:

i) $A_1 = \mathbb{N}$, met $e^{A_1} = 0$ en $F^{A_1}(n, m) = n + m$

ii) $A_2 = \mathbb{N}$ met $e^{A_2} = 1$ en $F^{A_2}(n, m) = nm$

iii) $A_3 = \mathbb{Z}$ met $e^{A_3} = 0$ en $F^{A_3}(k, l) = k^2 - l^2$.

Geef voor iedere structuur A_i een L-zin ϕ_i die waar is in A_i, maar onwaar in de beide andere structuren.

Opgave 5

Zij L een willekeurige taal en laten T_1 en T_2 L-theorieën zijn. Veronderstel dat de L-theorie $T_1 \cup T_2$ inconsistent is. Bewijs, dat er een L-zin ϕ bestaat, zodat $T_1 \models \phi$ en $T_2 \models \neg\phi$.
[Hint: gebruik de Compactheidsstelling]