Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college WISB323 werd in 2004/2005 gegeven door Jaap van Oosten.

Grondslagen van de Wiskunde, tweede deeltentamen) (WISB323) 4 februari 2005

Opgave 1

Geef bewijsbomen voor de volgende uitspraken:

$$\neg(\phi \wedge \neg\psi) \to (\phi \to \psi)$$
$$\neg(\phi \vee \neg\psi) \to \psi$$
$$\exists x\phi(x) \to \exists y(\phi(y) \vee \psi(y))$$
$$((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \to \psi$$

Opgave 2

Zij T een consistente theorie in een eerste orde taal $\mathcal{L}$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn, waarbij we $Th(M)$ schrijven voor de verzameling van zinnen van $\mathcal{L}$ die waar zijn in een model M.

a) T is volledig.

b) Elk tweetal modellen van T maakt dezelfde zinnen van $\mathcal{L}$ waar.

c) Als M een model voor T is, dan bewijzen T en $Th(M)$ dezelfde zinnen van $\mathcal{L}$ (dwz. $T \vdash \phi$ dan en slechts dan als $Th(M) \vdash \phi$).

Opgave 3

Zij $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}'$ een tweetal talen zodanig dat $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ (we zeggen dat $\mathcal{L}'$ een *uitbreiding* is van de taal $\mathcal{L}$). Elke $\mathcal{L}'$-structuur M bepaalt dan een $\mathcal{L}$-structuur N: N heeft dezelfde onderliggende verzameling als M en elke constante, relatie- of functiesymbool in $\mathcal{L}$ wordt in N precies zo geïnterpreteerd als in M. We zeggen dan dat N de *restrictie* is van M en, omgekeerd, dat M een *expansie* is van N. Zij verder T een theorie in de taal $\mathcal{L}$ en T' een theorie in de taal $\mathcal{L}'$. We zeggen dat T' een *uitbreiding* is van T, als voor elke $\mathcal{L}$-zin ϕ geldt dat $T' \vdash \phi$, wanneer $T \vdash \phi$.

a) Bewijs dat T' een uitbreiding is van T dan en slechts dan als de restrictie tot een $\mathcal{L}$-structuur van ieder model van T' een model van T is.

b) Bewijs dat als T' een uitbreiding is van T en elk model van T een expansie tot een $\mathcal{L}'$-structuur heeft die een model van T' is, dat T' dan conservatief is over T.

Opgave 4

Beschouw in de taal $L = \{\leq\}$ de theorie T van posets. Wanneer P een poset is en p en q elementen van P, dan is een *pad* (van lengte n) van p naar q een rijtje

$$p = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = q$$

van elementen in P, zodanig dat

$$x_i \leq x_{i+1} \text{ of } x_{i+1} \leq x_i$$

voor alle $i < n$.

a) Geef voor elke $n \in \mathbb{N}$ een formule $\phi_n(x, y)$ in de taal L, die uitdrukt dat er een pad van lengte n is van x naar y.

b) Bewijs dat $T \vdash \phi_n(x, y) \to \phi_{n+1}(x, y)$.

Een poset P heet *samenhangend* als er voor elk tweetal elementen $p, q \in P$ een pad bestaat van p naar q.

c) Bewijs dat er geen theorie $T' \supseteq T$ in de taal L bestaat waarvan de modellen precies de samenhangende posets zijn.

Opgave 5

Beschouw in de taal $L = \{\cdot, 1\}$ de theorie T van groepen. Zij G verder een groep. Geef theorieën T_0, T_1 en T_2 in de taal L_G zodanig dat voor elke L_G-structuur M geldt:

$$\begin{array}{lcl} M \models T_0 & \Leftrightarrow & M \text{ is een groep met een homomorfisme } f : G \to M. \\ M \models T_1 & \Leftrightarrow & M \text{ is een groep met een injectief homomorfisme } f : G \to M. \\ M \models T_2 & \Leftrightarrow & M \text{ is een groep die een elementaire substructuur } M' \text{ bevat} \\ & & \text{die isomorf is met } G. \end{array}$$