Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB323 werd in 2003/2004 gegeven door Jaap van Oosten.

Grondslagen van de Wiskunde (WISB323)
26 januari 2004

Dit tentamen bevat 5 opgaven. Alle opgaven tellen even zwaar. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en registratienummer.
Succes!

Opgave 1

Stel T is een L-theorie die kwantoreliminatie toelaat. Laat M een model van T zijn. Zij Δ de verzameling van alle kwantorvrije L-zinnen die waar zijn in M. Definieer T' door $T' = T \cup \Delta$.
Bewijs, dat T' volledig is.

Opgave 2

Laat T een ω-kategorische theorie zijn in een aftelbare taal L; veronderstel verder dat elk eindig model van T isomorf is met een substructuur van een oneindig model van T. Bewijs, dat voor elke kwantorvrije L-zin ϕ dan geldt:

$$T \vdash \phi \quad \text{of} \quad T \vdash \neg\phi$$

Opgave 3

Construeer bewijsbomen voor de volgende uitspraken:

a $\vdash \exists x(R(x) \to \forall y R(y))$

b $\phi \to (\psi \vee \chi) \vdash (\phi \to \psi) \vee (\phi \to \chi)$

c $\phi \to \forall x \psi(x) \vdash \forall x(\phi \to \psi(x))$, waarbij gegeven is dat de variabele x niet in ϕ voorkomt.

Opgave 4

Stel T is een L-theorie en $\phi(x, y)$ is een L-formule met twee vrije variabelen x en y. Laat F een 1-plaatsig functiesymbool zijn dat niet in L zit; zij $L' = L \cup \{F\}$ en T' de L'-theorie gegeven door

$$T' = T \cup \{\forall x(\exists y \phi(x, y) \to \phi(x, F(x)))\}$$

Bewijs, dat T' conservatief is over T; d.w.z. dat elke L-zin die uit T' volgt, al uit T volgt.

Opgave 5

a We herinneren eraan dat in ZF het *geordend paar* (x, y) gedefinieerd is als de verzameling $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Geef een formule $\psi(u)$ in de taal $\{\epsilon\}$ (dus zonder andere symbolen) die uitdrukt: "u is een geordend paar".

b Laat zien dat als A een niet-lege transitieve verzameling is, $\emptyset \epsilon A$ geldt. (Hint: gebruik het regulariteitsaxioma)

c Stel, dat A een transitieve verzameling van ordinaalgetallen is. Bewijs, dat A een ordinaalgetal is.