DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB324 WERD IN 2010-2011 GEGEVEN DOOR .

Voorstellingen van groepen (WISB324)
14 juni 2011

Het boek mag geraadpleegd worden. Bij elk onderdeel kun je gebruik maken van de resultaten uit voorgaande onderdelen, ook als je die niet hebt opgelost. Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!

Opgave 1. (4 pt)

Zij G de groep voortgebracht door drie elementen a, b, c met de relaties $a^3 = b^3 = c^2 = e,\ ab = ba,\ cac = b,\ cbc = a$ (e is de eenheid in G). De groep G heeft orde 18 en elk element kan geschreven worden in de vorm $a^i b^j c^k$ met $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $k \in \{0, 1\}$.

a) Bepaal de conjugatieklassen van G.

b) Bepaal de ééndimensionale representaties van G en geef hun waarden in een tabel.

c) Laat zien dat er naast de ééndimensionale representaties alleen nog maar tweedimensionale irreducibele representaties van G bestaan.

d) Bewijs dat ab in het centrum van G zit en dat $G/\langle ab\rangle \cong S_3$.

e) Bepaal met behulp van voorgaand onderdeel een tweedimensionaal karakter van G.

f) Bereken de karaktertabel van G.

Opgave 2. (4 pt)

Gegeven is de diedergroep $D_8 = \left\langle a, b | a^4 = b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$ van orde 8.

a) Bepaal de conjugatieklassen van D_8 en geef de karaktertabel.

Zij V de vectorruimte van polynomen in x_1, x_2, x_3, x_4 opgespannen over $\mathbb{C}$ door $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$ (kwadratische monomen met verschillende indices). Definieer de afbeelding $\rho : D_8 \to GL(V)$ door

$$\begin{aligned} \rho(a) : P(x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto P(x_2, x_3, x_4, x_1), \\ \rho(b) : P(x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto P(x_4, x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

voor alle $P \in V$ en $\rho(a^i b^j) = \rho(a)^i \rho(b)^j$ voor $i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1$.

b) Laat zien dat ρ een representatie van D_8 is.

c) Bepaal het karakter χ_ρ van ρ en geef deze in een tabel.

d) Schrijf χ_ρ als som van irreducibele karakters.

e) Bepaal van elke irreducibele deelrepresentatie van ρ een basis in V.

Opgave 3. (2 pt)

Zij G een groep met $4p$ elementen waarin p een priemgetal ≥ 5 is.

a) Laat zien dat elke irreducibele representatie dimensie $1, 2$ of 4 heeft.

b) Laat zien het aantal ééndimensionale representaties van G een deler van $4p$ is.

c) Laat zien dat het aantal ééndimensionale representaties van G deelbaar door 4 is.

Stel van nu af aan dat G niet abels is.

e) Bewijs dat G precies 4 ééndimensionale representaties heeft.

f) Bewijs dat G een cyclische groep H van orde p als normaaldeler heeft.

g) Zij H als boven en zij a een voortbrenger van H. Stel ook dat $G/H \cong C(4)$. Zij $b \in G$ is een element zó dat G wordt voortgebracht a en b. Bewijs dat de conjugatieklasse van b gelijk is aan bH.