Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB331 werd in 2007-2008 gegeven door Dr. H. Hanssmann.

Hamiltoniaanse dynamische systemen (WISB331)
2008-01-28

Voorzie $\mathbb{R}^4$ met de kanonieke Poissonstructuur $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ en $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Beschouw hierop de kwadratische Hamiltonfunctie

$$H_0^0(q,p) = p_1^2 + q_1^2 + \frac{p_2^2 + q_2^2}{2}$$

1. Schrijf de bewegingsvergelijkingen op en bereken de bijbehorende stroming

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (t, (q,p)) & \mapsto & \varphi_t(q,p) \end{array}$$

2. Bepaal de minimale periode $T > 0$ met $\varphi_T =$id en ga na dat

$$\begin{array}{rcl} \psi : S^1 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (\rho, (p,q)) & \mapsto & \varphi_\rho(q,p) \end{array}$$

   een S^1-actie op $\mathbb{R}^4$ definieert.

3. Bewijs dat elke ψ-invariante functie kan worden geschreven als functie van

$$\begin{array}{rcl} \tau_1 & = & \dfrac{p_1^2 + q_1^2}{2} \\ \tau_2 & = & \dfrac{p_2^2 + q_2^2}{2} \\ \tau_3 & = & q_1 \dfrac{q_2^2 - p_2^2}{2} + q_2 p_1 p_2 \\ \tau_4 & = & p_1 \dfrac{q_2^2 - p_2^2}{2} - q_1 q_2 p_2 . \end{array}$$

   Hint: gebruik complexe coördinaten $u = q_1 + ip_1$ en $v = q_2 + ip_2$.

De structuurmatrix $(\{\tau_i, \tau_j\})_{i,j=1,\ldots,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau_4 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 2\tau_4 & -2\tau_3 \\ \tau_4 & -2\tau_4 & 0 & \tau_2^2 - 4\tau_1\tau_2 \\ -\tau_3 & 2\tau_3 & -\tau_2^2 + a\tau_1\tau_2 & 0 \end{pmatrix}$ heeft rang 2.

4. Verifieer dat $H_0^0 = H_0^0(\tau)$ en $S(\tau) = 5\tau_1\tau_2^2 - \frac{5}{2}(\tau_3^2 + \tau_4^2)$ Casimirfuncties zijn.

5. Gebruik de waarde η van de Casimir H_0^0 om d.m.v.

$$x := \tau_3\, ,\ y := \tau_4\, ,\ z := \tau_1 - 2\tau_2$$

   een variabele te elimineren. Herschrijf de relaties

$$\tau_1 \geq 0\, ,\ \tau_2 \geq ,\ S(\tau) = 0$$

   in deze variabelen.

6. Ga na dat de (gereduceerde) faseruimte

$$\mathcal{P}_\eta := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{25}(z+2\eta)(\eta-2z)^2 = \frac{5}{2}(x^2+y^2),\ -2\eta \le z \le \frac{1}{2}\eta \right\}$$

een rotatie-oppervlak is en schets dit oppervlak. Waar heeft $\mathcal{P}_\eta$ een singulier punt?

De Poissonstructuur op $\mathcal{P}_\eta$ wordt in de variabelen x, y, z door

$$\{f,g\} = \langle \nabla f \times \nabla g \,|\, \nabla S_\eta \rangle$$

gegeven, met $S_\eta(x,y,z) = \frac{1}{25}(z+2\eta)(\eta-2z)^2 - \frac{5}{2}(x^2-y^2)$.

7. Bereken de derde orde normaalvorm van $H = H_0^0 + H_1^0$ met

$$H_1^0(q,p) = 2q_1q_2^2$$

en herschrijf deze als functie in x, y en z.

8. Formuleer de (gereduceerde) bewegingsvergelijkingen voor de Hamiltonfunctie

$$\mathcal{H}(x,y,z) = \eta + x$$

9. Schets voor $\eta > 0$ het faseportret van deze vergelijkingen en bepaal de evenwichtspunten.

10. Reconstrueer de door $\mathcal{H}$ gedefinieerde dynamica in twee vrijheidsgraden. Geef hiervoor aan tot welke soort trajectoriën de verschillende oplossingen van het gereduceerde systeem leiden.

11. Bepaal de singuliere waarde van de energie-impuls-afbeelding

$$\mathcal{EM} = (H_0^0, \mathcal{H}) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

12. Geef aan de hand van een schets van de verschillende waarden van $\mathcal{EM}$ in het (η, h)-vlak een verband tussen deze waarden en de verschillende soorten trajectoriën.

13. Veronderstel dat $\mathcal{H}$ de getrunceerde derde orde normaalvorm van H is en dat het verschil $H - \mathcal{H}$ 'voldoende klein' is. Welke bevindingen over de dynamica van $\mathcal{H}$ gelden ook voor de dynamica van H? Maak waar nodig extra aannames / vermeld de voorwaarden die je nodig hebt (het is niet gevraagd om deze ook te controleren).

Bonusopgave: kun je een soortgelijke analyse voor een willekeurige (maar nog steeds voldoende kleine) storing van $\mathcal{H}$ doorvoeren? Zijn er wezenlijke verschillen?