Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB362 werd in 2002/2003 gegeven door Karma Dajani.

Stochastiek A (WISB362)
23 oktober 2002

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.
* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4
punten:	25	25	25	25

Opgave 1

Stel dat X en Y stochasten zijn met simultane kansmassafunctie

$$p_{(X,Y)}(k,n) = P(X=k, Y=n) = \frac{e^{-1}2^{n-k}}{3^n k!(n-k)!}, \text{ voor } 0 \le k \le n \text{ en } n \ge 0.$$

a Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

b Laat zien dat $P(Y=n) = \frac{e^{-1}}{n!}$, voor $n = 0, 1, \ldots$.

c Bepaal $E(X|Y=n)$.

d Laat zien dat $P(X=Y) = e^{-2/3}$.

Opgave 2

Laat X een stochast zijn met genererende functie

$$G_X(s) = \frac{s}{8-7s}, \text{ voor } |s| < \frac{8}{7}.$$

a Bepaal $E(X)$.

b Bepaal $P(X=i)$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Concludeer dat X geometrisch verdeeld is.

c Zij $n \ge 0$, laat zien dat de genererende functie van nX gegeven is door

$$G_{nX}(s) = \frac{s^n}{8-7s^n}, \ |s| < (\frac{8}{7})^{1/n}.$$

d Zij N een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en $p = 1/2$. Veronderstel dat N onafhankelijk van X is, en laat $Y = NX$. Toon aan dat de genererende functie van Y gegeven is door

$$G_Y(s) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{s^k}{8-7s^k}, \text{ voor } |s| < (\frac{8}{7})^{1/n}.$$

Opgave 3

De mogelijke genotypen van een bepaald organisme zijn AA, Aa en aa, waarbij A en a genen zijn. Als twee organismen paren, dan geeft elk van de ouders onafhankelijk met kans 1/2 één van zijn genen, A of a, aan de nakomeling. Stel dat allebei de ouders met kans p^2 AA, met kans $2pq$ Aa en met kans q^2 aa als genotype hebben, waarbij $p + q = 1$.

a Laat zien dat een nakomeling weer met kans $2pq$ genotype Aa heeft, met kans p^2 genotype AA heeft en met kans q^2 genotype aa heeft. Dit resultaat staat bekend als de *wet van Hardy-Weinberg*.

b Laat zien dat de kans dat de vader AA heeft, gegeven dat een kind Aa heeft, gelijk is aan $p/2$.

Opgave 4

Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke Bernoulli stochasten zijn, elk met parameter $p = \frac{1}{2}$, d.w.z. $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 1/2$. Definieer voor $i = 1, 2, \ldots$ de stochasten Y_i door

$$Y_i = 2X_i - 1,$$

en laat $S_0 = 0$ en

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \text{voor } n \geq 1.$$

a Bepaal $P(S_8 = 6)$.

b Zij $T = \min\{n > 0 : S_n = 0\}$. Bepaal $P(T = n)$ voor $n = 1, 2, \ldots$.

c Laat zien dat $P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0) = \frac{1}{n} E(|S_n|)$.

d Bepaal $\lim_{n\to\infty} P(S_n > n)$ en $\lim_{n\to\infty} P(S_n > \sqrt{n})$.