Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB362 werd in 2002/2003 gegeven door Karma Dajani.

Stochastiek B (WISB362)
18 december 2002

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.
* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4
punten:	25	25	25	25

Opgave 1

Stel dat de simultane dichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y}{x} & \text{als } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

a Laat zien dat $f_{Y|X}(y|x)$, de conditionele dichtheid van Y gegeven $X = x$, gegeven wordt door

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} & \text{als } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

b Bepaal $E(Y|X = x)$ en $E(Y)$.

c Bepaal $P(X + Y \leq 1)$.

d Bepaal de simultane dichtheid van $U = (X + Y)/2$ en $V = (X - Y)/2$.

Opgave 2

Stel dat Y en U onafhankelijke stochasten zijn met Y standaard normaal verdeeld, en U een discrete stochast met $P(U = 1) = P(U = -1) = 1/2$. Zij $Z = UY$.

a Laat zien dat Z standaard normaal verdeeld is.

b Laat zien dat $E(YZ) = 0$. Concludeer dat $E(YZ) = E(Y)E(Z)$.

c Laat zien dat $P(Y + Z = 0) = 1/2$. Zijn Y en Z onafhankelijk?

Opgave 3

Zij X een uniform verdeelde stochast op $(0, 1)$, en Y exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 1$ (d.w.z. $P(Y > y) = e^{-y}$, $y > 0$ en 0 anders). Laat $U = -\log(1 - X)$, en $W = e^{-Y}$ (log is de natuurlijke logarithm).

a Laat zien dat U exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

b Laat zien dat W uniform verdeeld is op $(0, 1)$.

c Bepaal $P(X \leq x, X^2 \leq y)$ voor $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4

Zij $X_1, X_2, \ldots,$ een rij van onafhankelijke stochasten met X_n exponentieel verdeeld met parameter $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ (d.w.z. $P(X_n > x) = e^{-x/n}$ voor $x > 0$ en 0 anders).

a Laat zien dat $Y_n = X_n/n$ exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

b Zij $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$, en Y een continue stochast met verdelingsfunctie

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = e^{-e^{-y}}, \ \infty < y < \infty.$$

Laat zien dat

$$M_n - \log n \Rightarrow Y.$$

(Hier is $\log n$ het natuurlijke logaritme van n).

c Zij $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$, en ϕ_{Z_n} de karakteristieke functie van Z_n. Laat zien dat $\lim_{n \to \infty} \phi_{Z_n}(t) = e^{it}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

d Laat zien dat $\lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq 1) = 1/2$.